

# **FINANCE DE MARCHÉ**

**UNE INTRODUCTION À LA GESTION DES RISQUES ET DE LA**

**PERFORMANCE**

---

Pierre Clauss

Ensaï  
Deuxième Année

## OBJECTIF DE L'ENSEIGNEMENT

---

Le cours de Finance de Marché est composé de 8 séances de 2h30. Il sera séparé entre 4 cours magistraux et 4 travaux pratiques d'application des techniques appréhendées à des données financières.

Ce cours est une introduction à la Finance de marché au sens large mais aussi à la filière de troisième année Gestion des Risques et Ingénierie Financière.

Cette filière ouvre à plusieurs métiers de l'Industrie Financière dont nous étudierons les spécificités dans ce cours : cela va du modélisateur des risques au stratéliste quantitatif, de l'allocataire au statisticien développant des scores de risque client.

Étant donné que ce cours constitue un pré-requis pour suivre les cours de la filière Gestion des Risques et Ingénierie Financière, sa *philosophie* va être de développer une certaine culture générale sur les marchés financiers, mais aussi d'appréhender plusieurs techniques statistiques et de les appliquer à des enjeux financiers via la programmation informatique essentiellement à l'aide du logiciel Excel.

Pour tester vos aptitudes à suivre la filière, ce cours fera donc l'objet d'un mini-projet.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>4</b>
<b>1 CAPITALISME FINANCIER</b>	<b>5</b>
1.1 Marchés financiers	5
1.1.1 Évolution dans les années 70	5
1.1.2 Fonction des marchés financiers	9
1.1.3 Acteurs des marchés financiers	11
1.2 Institutions financières	12
1.2.1 Cinq métiers principaux	12
1.2.2 Organisation d'une salle de marché	12
1.2.3 Possibles métiers d'un diplômé de l'Ensaï	12
1.3 Instruments financiers	14
1.3.1 Produits de base	14
1.3.2 Produits dérivés	19
<b>2 RISQUES FINANCIERS ET PERFORMANCE D'INVESTISSEMENT</b>	<b>24</b>
Préambule : la culture du risque dans nos sociétés contemporaines	24
2.1 Mesurer les risques financiers	27
2.1.1 Modèles à facteurs de risque	27
2.1.2 Mesure synthétique du risque	30
2.2 Mesurer la performance d'investissement	36
2.2.1 Une première mesure synthétique	36
2.2.2 Mesures de rentabilité ajustée du risque	39
2.3 Allocation et stratégies d'investissement	40
2.3.1 Allocation efficiente de Markowitz	40
2.3.2 Stratégies de couverture du risque en delta statique	42
<b>CONCLUSION</b>	<b>44</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>45</b>

# INTRODUCTION

Ce cours présentera tout d'abord des éléments de culture générale sur la finance de marché qui constitueront les bases des parties suivantes. Nous étudierons ainsi l'histoire de la finance moderne depuis les années 70, les institutions financières constituant les marchés financiers, et les instruments financiers que l'on peut échanger sur ces derniers, allant des produits de base aux produits dérivés.

Ces bases fondamentales nous permettront d'aborder la problématique que nous avons élaborée pour ce cours. En effet, la finance moderne est née entre autres avec les travaux de Markowitz en 1954 qui ont imposé comme éléments fondamentaux aux marchés financiers le risque et la performance des instruments financiers ou de leur agrégation. Nous avons donc eu envie de proposer dans ce cours une deuxième partie se focalisant sur les problématiques du risque en finance de marché : comment le mesurer, comment le couvrir ? et celles de la performance : comment la mesurer, comment créer de la performance ?

Ainsi, avec la filiation de Markowitz et de sa découverte des éléments essentiels en finance de marché que sont le risque et la performance, nous tenterons de développer leurs tenants et aboutissants à l'aide des progrès faits et des nouvelles techniques quantitatives réalisées depuis plus de cinquante ans et les travaux originels du Prix Nobel d'Économie de 1990.

# CHAPITRE 1

## CAPITALISME FINANCIER

### 1.1 Marchés financiers

Nous entendons par capitalisme financier l'évolution du capitalisme dans nos sociétés actuelles et dont Aglietta et Reberieux [2] précisent les dérives. Depuis le milieu des années 70, nombreux s'accordent à dire que les marchés financiers ont fortement évolué avec une liquidité de plus en plus abondante et des marchés de plus en plus englobants, ainsi que l'apparition de fonds d'investissement dont le pouvoir financier n'a cessé de croître. La financiarisation actuelle de l'économie a de grandes conséquences sur la société elle-même.

#### 1.1.1 Évolution dans les années 70

##### Croissance de la liquidité et des transferts de risque

Les années 70 sont caractérisées par l'apparition de fortes incertitudes financières : l'inflation s'accrût, en même temps que le développement de la volatilité des taux, ainsi qu'une importante instabilité des taux de change et des produits énergétiques avec les deux chocs pétroliers, et enfin l'endettement croissant des pays en voie de développement. Ces événements se sont accompagnés d'une croissance des marchés financiers pour faciliter les transferts de risques entre entreprises ou États. Ces derniers ont eu pour conséquence une augmentation de la liquidité, via la multiplication des marchés de dérivés.

Remarquons que ce mouvement est inverse à celui d'après la crise de 1929, qui avait vu Roosevelt supprimer les marchés de dérivés. Comment expliquer cette évolution ? Il faut rappeler que les crises financières aboutissent en majorité à des crises de liquidité. Cela est appuyé par l'image d'Épinal des épargnants pris de panique allant retirer leur argent en faisant la queue devant les banques lors de crises comme celle de 1929 par exemple. Une crise financière peut avoir de multiples causes, qui sont souvent des bulles spéculatives, mais se termine toujours par un défaut de liquidité et donc la faillite de firmes, d'États ou encore de ménages. Le fait de faciliter les transferts de liquidité via les produits dérivés permet d'éviter la contagion à toutes les entreprises d'une même place financière. Et les outils développés dans les années 70 ont permis aussi de faciliter leur échange : évaluation d'un call par Black et Scholes et amélioration des outils informatiques entre autres.

Il en est ainsi également de la crise des subprimes de l'été 2007 : suite à la faillite de ménages américains sur-endettés dont les emprunts se retrouvaient dans des portefeuilles de crédit sophistiqués dans les banques internationales, il devint difficile de trouver des acheteurs de ces produits devenus alors illiquides. Sans l'utilisation de produits assurantiels et l'intervention des banques centrales ajoutant de la liquidité sur les marchés financiers, peut-être que la crise aurait eu, en tout cas au début, des conséquences encore plus graves.

Mais cette remarque en implique une autre sur l'autre face de Janus des marchés financiers autrement moins souriante : la facilitation des transferts de risque a été favorisée par des produits dérivés et des innovations

financières complexes contiguës, augmentant les appétits des spéculateurs y trouvant des sources de profit simples et rapides. Ces produits dérivés ont ainsi certes permis une croissance de la liquidité nécessaire pour éviter la faillite, mais l'opacité les accompagnant a augmenté les risques sous-jacents, en facilitant la spéculation et l'instabilité financière. La crise du début d'année 2008 est entre autres causée par un manque de confiance dans les produits de crédit complexes, innovants mais difficiles à évaluer. La bulle spéculative sur les prix des matières premières du printemps 2008 est aussi révélatrice de l'appétit des spéculateurs à faire des profits rapides. Ceci explique certainement pourquoi Roosevelt avait voulu la suppression des marchés de dérivés dans les années 1930.

Sur la crise des subprimes, voici un point de vue paru dans Ouest France le 3 octobre 2008.

## Un an après la crise des subprimes

Avec le recul de l'année passée, peut-on faire l'analyse de la crise financière des "subprimes", ces crédits immobiliers accordés aux ménages américains modestes et peu solvables ? Et comprendre comment on a pu aboutir à l'Implosion du capitalisme financier que décrit Paul Jorion (Fayard), et que confirme la mise en faillite de Lehman Brothers ?

Tout d'abord, la conjoncture économique a été, aux Etats-Unis en particulier, très favorable ces dernière années : un taux d'emprunt bas et un marché de l'immobilier en très forte hausse. Et comme souvent dans ce cas, les gens perdent la mémoire et pensent que si ça monte, ça va continuer de monter. Lorsque l'on ajoute une culture de fort endettement, propre aux américains notamment, les choses se compliquent. En effet, un américain, lorsqu'il reçoit 100, dépense 101 : d'une part il n'épargne pas et d'autre part il emprunte.

C'est ici qu'intervient la responsabilité des banques et des instituts prêteurs qui ont abusé d'une part de prêts à des ménages non solvables et d'autre part s'en sont déchargé sur d'autres investisseurs, via la sophistication de la titrisation. Une technique qui consiste à transférer à des investisseurs des actifs, tels que des créances, en les transformant en titres financiers. Ainsi s'est opérée une dissociation entre la distribution du crédit et la gestion de son financement.

### Manque de transparence

Présentons ce mécanisme complexe de manière plus simple. Une banque américaine va prêter à chacun de ses 100 clients 100 mille dollars pour acheter une maison. Parmi ces 100 ménages, certains ont acheté une maison

avec piscine de 300 m<sup>2</sup> en Californie avec des revenus insuffisants : ce sont ces ménages que l'on appelle les emprunteurs " subprimes ", (littéralement "en dessous" des emprunteurs solvables dits "prime"). Mais comme ils ont la possibilité de rembourser seulement les intérêts, variables la plupart du temps, pendant la période du prêt et le capital in fine, la lourdeur de l'emprunt est amoindrie. En outre, avec un bien qui ne perd pas de sa valeur, l'emprunteur pourra rembourser à l'aide de la revente de sa maison. Cette logique est viable lorsque les taux sont faibles et que le marché de l'immobilier ne chute pas.

Mais revenons à la banque américaine. Elle a une créance de 10 millions de dollars. Au lieu de supporter ce poids de dette, elle va donner la "patate chaude" à d'autres investisseurs (les fonds de pension, les fonds spéculatifs, voire même le gestionnaire d'une SICAV monétaire d'une banque française). Ainsi, le prêt fait à ces 100 ménages, dont certains "subprimes", se retrouve être supporté non plus par la banque américaine mais par de multiples acteurs disséminés partout dans le monde. La dilution des 10 millions de dollars semble être la garantie à la non-perte de ce capital. L'avantage pour les investisseurs est qu'ils perçoivent alors un taux d'intérêt élevé. Car lorsque l'on prête à des individus sans fort capital, on leur demande un taux d'intérêt plus élevé. Ce système satisfaisait tout le monde. Seulement lorsque les taux ont monté et que le marché de l'immobilier a chuté, les ménages américains qui se croyaient être devenus propriétaires se sont retrouvés à la rue.

Le problème non résolu à ce jour est le manque de transparence des marchés finan-

ciers. En effet, c'est sur leur opacité que se sont fait la valeur des contrats titrisés réali- sés ces dernières années. Leur valeur aurait due être beaucoup plus faible si l'évaluation avait pris en compte le risque de baisse de l'immobilier. Il faut donc éviter de penser que le pire est toujours derrière nous lorsque la conjoncture s'améliore. Cela évitera peut-être de croire que l'on peut faire de l'argent sans créer de valeur.

### Capitalisme actionnarial et apparition des "zinzins"

Outre la croissance de la liquidité et des transferts de risque, les années 70 voient l'apparition d'une nouvelle forme de gouvernance des entreprises. Le capitalisme managérial va ainsi être détrôné par un capitalisme où le contrôle et la propriété (Berle et Means [4]) ne sont plus séparés, où le *principal*, l'actionnaire, va pouvoir avoir un contrôle sur l'*agent*, le manager. Ainsi, la capitalisme va devenir actionnarial et l'*outsider* qu'est l'actionnaire va avoir un impact très important sur la gouvernance d'entreprise et sur l'*insider* que représente le manager. Le capitalisme actionnarial a transformé en profondeur nos entreprises en réduisant l'asymétrie d'information existant par définition entre le propriétaire de la firme et son dirigeant.

Cette évolution de l'actionnariat est favorisée par l'apparition de nouveaux acteurs collectant une épargne de plus en plus importante : les investisseurs institutionnels ou "zinzins". Ce nouvel actionnariat va prendre de nombreux visages : fonds de pension, mutual funds (fonds communs de placement), hedge funds, assureurs ou encore les fonds souverains, dont les activités font l'actualité récente.

Les conséquences sont autant sociales qu'économiques. La presse relate en effet très régulièrement les décisions des actionnaires délocalisant les industries par exemple pour diminuer les coûts et augmenter la valeur actionnariale de l'entreprise. Nous étudierons plus bas la définition de l'action comme instrument financier et nous comprendrons la relation proportionnelle entre la valeur de l'action et les bénéfices pouvant être retirés d'une firme : plus les bénéfices anticipés seront importants, plus l'action augmentera sa valeur. Nous comprenons donc pourquoi lorsque des licenciements sont annoncés, la valeur de l'action augmente. Et ceci n'est pas dû à la malveillance des actionnaires mais à leur volonté de maximiser leur investissement dans la firme : une vague de licenciements réduira les coûts et augmentera les bénéfices futurs. Tout le débat est alors de savoir si ces coûts à court-terme n'auraient pas pu être aussi des bénéfices à long-terme... Mais aujourd'hui le bénéfice social n'est pas intégré dans la valeur actionnariale.

Mais revenons aux "zinzins". Ils ont aujourd'hui une importante épargne à gérer. Et cette gestion doit intégrer deux objectifs paradoxaux : ne rien perdre tout en gagnant le plus possible ! Cette double exigence va demander, outre un contrôle de plus en plus accru sur la gouvernance d'une entreprise, le développement d'outils quantitatifs aidant à la gestion efficace de cette épargne satisfaisant au mieux le client, qui vit dans une société de plus en plus imprégnée par la maîtrise du risque.

Voici un point de vue paru dans Ouest France le 3 novembre 2008.

### Les fonds, nouveau visage du capitalisme financier

Depuis le début de la crise financière, on a évoqué des prises de position hasardeuses des banques qui leur ont fait perdre des sommes gigantesques. Une des raisons à ces dérives est l'éloignement des banques de leur métier historique, qui est de financer l'économie, vers celui d'investisseurs plus agressifs, qui sont souvent appelés "fonds". Or cette dénomination englobe une diversité d'acteurs.

Un fonds est une société ayant du capital financier à gérer pour le compte d'autres individus ou institutions. Ces sociétés créent alors un ou plusieurs fonds qui vont investir dans

une entreprise ou dans des titres financiers. Par abus de langage, on dénomme le tout, la société de gestion, par sa partie, le ou les fonds. Tout d'abord, les **fonds de pension** les plus décriés, détruisant ici des emplois, rapportant là-bas (c'est moins vrai) de belles pensions aux retraités. Ces sociétés sont des collecteurs d'épargne pour la retraite de leur client. En France, la retraite est en majorité issue du principe de répartition, c'est-à-dire que la génération au travail paye la retraite des plus de 60 ans. Aux États-Unis, la réalité est autre : chacun épargne durant son travail pour sa re-

traite. Et cette épargne est collectée par des sociétés travaillant à faire fructifier le plus possible sans perdre l'argent de leurs futurs retraités. La somme détenue par ces fonds est colossale. Le problème est que dans 20 ans, à cause du papy boom, il y aura plus de retraits d'argent que d'entrées ce qui pousse ces fonds à demander une performance de leurs investissements plus importante.

### Les nouveaux agressifs

Pour créer de la performance, plusieurs sociétés proposent leur service, les fonds de pension déléguant la gestion active de leur argent.

Tout d'abord, les **fonds mutuels** sont les plus traditionnels : ils investissent sur les marchés avec les outils classiques (actions, obligations) et une certaine expertise mais un contrôle des risques les amenant à ne pas faire n'importe quoi. En France, ce sont les SICAV (Sociétés d'Investissement à Capital Variable) ou encore les FCP (Fonds Communs de Placement) que les banques proposent par exemple au sein d'un PEA (Plan d'Épargne en Actions). Leur gestion classique subit de plus en plus la concurrence de gestionnaires plus agressifs.

Les **fonds de private equity**<sup>1</sup> ont fait leurs premiers pas en France avec par exemple l'achat du PSG par Colony Capital, ou encore Legrand par KKR et la famille française Wendel. Ces fonds vont investir dans des entreprises non cotées ou des entreprises cotées qu'ils retirent de la Bourse. Ils deviennent les propriétaires de ces entreprises et leur objectif est de rationaliser la gestion, l'améliorer, pour les revendre avec une plus-value importante.

Pour en devenir propriétaire, ces fonds font appel à des emprunts colossaux. Les fonds de pension peuvent faire partie alors des prêteurs potentiels à ce type d'achat, appelé LBO : Leverage Buy-Out. En misant peu de sous et en réalisant une large plus-value, ces fonds ont attiré de nombreux investisseurs avides de rendements importants. L'enquête passionnante

de Godeluck et Escande *Les pirates du Capitalisme* (Albin Michel, 2008) en explique le fonctionnement.

Les seconds fonds "agressifs" sont les **fonds spéculatifs** qui ne vont pas agir hors de la Bourse, mais au contraire utiliser les anomalies de prix des actifs financiers pour créer de la performance. Ils peuvent aussi s'intéresser à rendre plus performant le management d'une entreprise en achetant une minorité d'actions et en poussant de manière agressive le management à se transformer lors des assemblées générales.

Dernière catégorie de fonds, les **fonds souverains** : ils ont l'apparence de fonds de pension mais sont beaucoup plus opaques sur leurs intentions. Ils se sont développés à l'aide des fortes réserves d'argent que les États exportateurs ont pu accumuler, soit par le pétrole, comme la Norvège ou les Émirats Arabes Unis, soit par les biens de consommation exportés et les réserves de change induites, comme la Chine. Ils ont été ces derniers mois de grands pourvoyeurs de liquidité en investissant dans les banques affaiblies par la crise. Et Nicolas Sarkozy vient de lancer la création d'un fonds français.

Le développement de ces nouveaux acteurs est lié à la crise que l'on vit actuellement : une épargne excessive investie dans des actifs existants et non innovants, comme l'immobilier, créant alors une bulle. Et les banques qui ont voulu participer à cette euphorie en copiant les fonds spéculatifs par exemple ont pu perdre énormément.

Ces nouveaux acteurs du capitalisme peuvent peser sur nos économies de façon parfois désastreuse. Non pas parce que ces acteurs sont pétris de mauvaises intentions mais parce qu'il manque des contre-pouvoirs à ces fonds qui éviteraient de les rendre trop puissants. A quand la mise en place d'une Organisation Mondiale des Marchés Financiers ?

1. "Private equity" s'oppose en anglais à "public equity" qui signifie "capital issu de la Bourse", donc public par la large information diffusée sur les entreprises cotées.

### 1.1.2 Fonction des marchés financiers

#### A quoi servent les marchés financiers ?

Outre cette évolution des marchés financiers et les polémiques s'ensuivant sur ce capitalisme actionnarial, il nous faut revenir sur la définition d'un marché financier et son utilité. Car certainement que les progrès de nos sociétés contemporaines n'auraient pas pu avoir lieu sans les facilités qu'ont permis les marchés financiers dans la fluidité de nos économies.

Voici un point de vue paru dans Ouest France le 17 octobre 2008.

### "Bon" et "mauvais" capitalisme

Nicolas Sarkozy s'est élevé à plusieurs reprises contre le capitalisme financier, composé de "spéculateurs" et de "rentiers" pour se faire le défenseur du capitalisme d'"entrepreneurs". Qu'est ce que signifie vouloir en finir avec le capitalisme financier ? Est-ce réaliste ? Quelles en seraient les conséquences ?

Il faut se rappeler qu'en août 2007, le chef de l'Etat était à l'origine de la loi votée en faveur du travail, de l'emploi et du pouvoir d'achat (TEPA). Celle-ci a supprimé les droits de succession pour exonérer la majorité des héritages, si ce n'est tous, à l'aide des différentes donations possibles. Or supprimer ces droits peut favoriser la formation d'une société bloquée de rentiers. Les milliardaires américains, tels Georges Soros, Warren Buffet, les héritiers Rockefeller entre autres, l'avaient bien compris en 2001 en s'opposant à Georges W. Bush, qui alors voulait supprimer les droits de succession. Ces milliardaires, ayant pour beaucoup construit leur fortune sur les marchés financiers, affirmaient par leur pétition que l'enrichissement ne doit pas tenir de l'héritage mais du mérite.

Le débat entre les pourfendeurs et les admirateurs du capitalisme financier n'est pas récent. Les dénonciateurs de la spéculation, à l'origine de la déstabilisation des marchés financiers et ensuite de l'économie réelle, n'ont pas attendu cette crise pour s'élever. Les chantages des marchés financiers et de la spéculation qui optimise les échanges non plus. Alors que penser ?

Un grand économiste qui a vécu l'autre grande crise, celle de 1929, peut nous éclairer. En effet, Keynes développe une analyse subtile de la spéculation dans le chapitre 12 de la Théorie Générale de l'Emploi, de l'Intérêt et de

la Monnaie. Outre le fait d'être l'un des plus grands économistes du XXème siècle, Keynes était aussi un fin spéculateur. Son analyse de la spéculation et de son impact sur l'économie n'en est que plus intéressante. Il définit cette activité de manière peu glorieuse. Quelques extraits suffisent pour nous en convaincre : "[Les spéculateurs] se préoccupent, non de la valeur véritable d'un investissement pour un homme qui l'acquiert afin de le mettre en portefeuille, mais de la valeur que le marché, sous l'influence de la psychologie de masse, lui attribuera trois mois ou un an plus tard. [...] Telle est la conséquence inévitable de l'existence de marchés financiers conçus en vue de ce qu'on est convenu d'appeler la "liquidité" (Payot)."

Pourtant Keynes ajoute que cette liquidité est nécessaire aux marchés financiers pour qu'ils puissent exister et drainer des investissements nouveaux. Liquidité signifie fluidité des échanges. Ainsi il faut bien des acheteurs lorsque tout le monde vend. Et ces acheteurs ne peuvent être que des spéculateurs, ces investisseurs "éclairés" qui, selon Keynes, ont pour objectif de "prévoir la psychologie du marché". L'attrait des marchés financiers serait réduit à néant si l'épargnant ne pouvait retirer son argent quand il le souhaite, car dans ce cas, il le placerait ailleurs.

Opposer deux capitalismes n'est donc pas une solution. La spéculation ; malgré ses aspects choquants, peut s'avérer très utile aux marchés financiers. La considérer comme un fléau serait contre-productif. Cela reviendrait à bannir les marchés financiers, tout de même utiles aux investissements de nos économies.

En revanche, définir un code éthique du spéculateur au niveau mondial qui l'obligerait à

reverser une partie de ses bénéfices à la lutte contre d'autres fléaux comme la faim dans le monde, les maladies, la pollution ne serait peut-être pas inutile... en évitant de supprimer la sacro-sainte liquidité, ce que la taxe Tobin sur les transactions monétaires est malheureusement susceptible de détruire.

On considère souvent les marchés financiers comme le lieu de rencontre entre capacités de financement et besoins de financement. Traditionnellement, on réduit ce lien à celui liant épargne et investissement. En effet, si les agents économiques assuraient entièrement leurs besoins de financement à l'aide de leurs ressources propres, les marchés financiers n'auraient aucune utilité.

En outre, les marchés financiers établissent une autre lien dans l'économie entre le passé et le futur. Les capacités de financement correspondent à l'épargne de revenus passés et les besoins de financement s'assimilent à des projets d'investissement qui se réaliseront dans le futur. Alors se contractent des engagements de transfert de liquidité entre investisseurs et épargnants, ces derniers exigeant une rémunération à cause du risque de perte potentielle en cas de faillite de l'investisseur. Nous apercevons déjà ces deux notions fondamentales en finance que sont le risque et la performance.

Les marchés financiers permettent donc d'allouer les ressources de la manière la plus optimale possible entre des agents de profils opposés : les épargnants sont averses au risque et veulent récupérer leur liquidité aisément sur un horizon court et avec une rentabilité significative ; alors que les investisseurs veulent emprunter au moindre coût et sur un horizon plus long.

Précisons tout de même que les marchés financiers ont permis une fluidité du lien entre l'épargne et l'investissement, ce qui n'implique pas leur augmentation : au contraire, dans la plupart des pays occidentaux, les épargne et investissement nationaux ont connu un fléchissement significatif.

### Finance directe et finance indirecte

Pour optimiser l'allocation, deux possibilités s'offrent : la finance indirecte et la finance directe selon la terminologie de Gurley et Shaw [12] définie en 1960. L'épargnant a en effet le choix entre deux solutions pour placer sa liquidité :

- la placer chez un intermédiaire financier qui l'alloue à un emprunteur de son choix : ceci correspond au circuit de la finance indirecte,
- la placer directement sur les marchés financiers via un instrument financier de son choix (action, obligation, option). Le prêt est directement confié à l'emprunteur : ceci correspond au circuit de la finance directe.

Sur la même problématique, Hicks [13] a proposé en 1974 une distinction entre d'une part l'économie d'endettement, *overdraft economy*, caractérisée par une finance indirecte, et d'autre part, l'économie de marchés des capitaux, *autoeconomy*, où les marchés financiers assurent le financement de l'économie.

En France, le passage d'une économie d'endettement à une économie de marché s'est faite en trois temps après la seconde guerre mondiale :

1. le contrôle administratif du crédit et de l'épargne jusqu'en 1965 : c'est le Tout-État,
2. l'essor de la banque universelle jusqu'à la fin des années 70, qui regroupe les banques de dépôts, banques d'affaires et banques de crédit à moyen et long termes, définitivement consacrée par la loi bancaire de 1984,
3. l'affirmation des marchés financiers avec une présence toujours non négligeable de l'État et des banques, depuis le début des années 80.

### 1.1.3 Acteurs des marchés financiers

Le processus en France de désintermédiation financière depuis le début des années 80 a donc comme spécificité de conserver d'importants agents économiques comme l'État et les banques universelles, mais a connu aussi comme ailleurs l'apparition de nouveaux acteurs sur les marchés financiers : les "zinzins", précédemment cités.

Nous pouvons distinguer ces différents acteurs suivant qu'ils prêtent ou empruntent des capitaux :

- nous caractérisons d'emprunteurs nets les entreprises, les administrations publiques, comme l'État,
- et de prêteurs nets les ménages, les institutions financières, comme la banque universelle en France, mais aussi les "zinzins" : fonds de pension, ou de retraite, mutual funds, hedge funds, sovereign-wealth funds, compagnies d'assurance, qui ont tous un impact qui n'a cessé de croître depuis les années 70.

Nous allons dans la suite détailler le fonctionnement des institutions financières et plus précisément celui des banques qui sont devenues aujourd'hui incontournables.

## 1.2 Institutions financières

Outre les investisseurs institutionnels, les plus influents acteurs des places financières sont les banques. En France, la loi bancaire de 1984 a permis l'affirmation définitive des banques universelles, améliorant par la-même le système bancaire français d'alors disséminé et inefficace. Un quart de siècle plus tard, les banques universelles se sont adaptées à la déréglementation et à l'éclosion des marchés financiers. Nous présentons ici une nomenclature pour comprendre les différentes filiales bancaires.

### 1.2.1 Cinq métiers principaux

Cinq métiers caractérisent aujourd'hui les banques généralistes :

1. la banque de détail, ou *retail*, collectant les capitaux auprès de clients particuliers. Les filiales banques privées en sont des cas particuliers spécialisés pour des clients à fort capital financier,
2. la gestion d'actifs, ou *Asset Management, AM*, gérant des capitaux pour compte de tiers, regroupant entreprises et investisseurs institutionnels,
3. la Banque de Financement et d'Investissement (BFI), ou *Corporate and Investment Banking* regroupant trois missions principales : le financement de projets, le conseil en fusions et acquisitions, et le développement de produits financiers complexes et le trading pour compte propre sur les marchés de capitaux. C'est dans sur dernière branche que se situent les salles de marché développant des stratégies et produits financiers complexes, dits exotiques,
4. les services financiers, concernant le crédit à la consommation, les cartes de paiement, etc,
5. les services d'assurance, comprenant les portefeuilles d'assurance-vie, les contrats d'assurance-décès, accidents, habitation.

### 1.2.2 Organisation d'une salle de marché

Nous décrivons succinctement l'organisation d'une salle de marché d'une banque, et plus particulièrement celle de la BFI (une organisation proche caractérise aussi celle de l'AM). Elle est séparée d'une part en type de produits financiers traités : actions, obligations, matières premières, monétaire, crédit. Et d'autre part, quatre lieux de décisions se distinguent :

1. le *front-office* directement relié aux marchés de capitaux. Les intervenants sont nombreux : vendeurs ou *sales*, structureurs développant les produits financiers complexes, traders, *quants*, déterminant les modèles d'évaluation des produits financiers de la salle, analystes financiers,
2. le *middle-office*, garantissant la bonne tenue des opérations réalisées par les traders via l'enregistrement dans les systèmes d'information,
3. le *back-office* assurant la comptabilité, le paiement des opérations des traders,
4. le contrôle des risques auditant les risques pris par les traders et vérifiant leurs transactions pour éviter toute erreur d'évaluation et fraude.

### 1.2.3 Possibles métiers d'un diplômé de l'Ensaï

L'Ensaï, via sa filière Gestion des Risques et Ingénierie Financière, a comme employeur principal les banques et ses différentes filiales. Nous allons présenter une typologie des différents métiers que peut exercer un ingénieur financier diplômé de l'Ensaï.

Il faut auparavant insister à nouveau sur le fait que les banques sont devenues le centre de décision principal des marchés financiers et un interlocuteur privilégié des sphères politique, civile, médiatique. De nouveaux métiers sont apparus aussi et de nouvelles compétences recherchées comme celles des mathématiciens ou *quants* qui sont devenus avec la complexité des produits développés les stars des marchés financiers.

La formation donnée à l'Ensaï avec la filière Gestion des Risques et Ingénierie Financière trouve sa place dans cette évolution : elle ne forme pas les *quants* dont nous parlions mais plutôt des statisticiens financiers qui auront toute leur légitimité dans les cinq métiers de la banque au sein de services divers comme :

1. les services de direction des risques des banques au sein de la direction du Retail, pour contrôler, mesurer et réglementer les risques bancaires,
2. l'ingénierie financière de la gestion d'actifs comme allocataires et stratégestes quantitatifs,
3. les services de contrôle des risques dans les salles de marché de la BFI. Les métiers de *quant* à proprement parler ne sont pas ouverts à un diplômé de l'Ensaï ; néanmoins, ses compétences peuvent être appréciées pour calibrer statistiquement les modèles probabilistes développés par le *quant*, ou encore pour développer des stratégies d'arbitrage,
4. les services statistiques dans les filiales de crédit à la consommation pour développer des outils de scoring client,
5. et enfin il commence à se développer des métiers d'allocataire quantitatif et de contrôleur des risques dans les filiales d'assurance des banques.

Étudions maintenant les instruments financiers à la disponibilité des acteurs des marchés financiers.

## 1.3 Instruments financiers

### 1.3.1 Produits de base

Deux instruments fondamentaux permettent aux entreprises de lever des fonds sur les marchés financiers : les actions et les obligations. Nous allons étudier leurs définition et spécificités.

#### Actions

##### *Définition*

Une action est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une société. Généralement, cette valeur mobilière est cotée en Bourse et a une liquidité normalement assurée. En outre, elle confère à son acquéreur des droits sur l'entreprise, étant donné qu'il en devient propriétaire. Une action donne droit à un vote au sein de l'assemblée générale des actionnaires. Lors de cette assemblée, il est discuté de la gestion de l'entreprise pour laquelle les actionnaires sont responsables.

Nous pouvons distinguer pour un actionnaire ses droits monétaires de ses droits non monétaires. Pour les premiers, nous avons principalement :

- Le droit au dividende : le solde bénéficiaire des comptes annuels d'une entreprise, égal aux recettes auxquelles on soustrait les charges, est réparti entre les réserves de la société, servant à son autofinancement, et les dividendes, affectés aux actionnaires. Ceux-ci sont variables puisqu'ils dépendent des résultats d'une firme. Ce dividende peut soit être payé à l'actionnaire soit transformé en actions nouvelles gratuites. Le *payout ratio* correspondant au ratio entre les dividendes et les bénéfices nets est variable suivant les sociétés : celles de secteurs mûres vont distribuer des dividendes plus importants que celles de secteurs en croissance, qui veulent croître plus rapidement et allouer donc plus de capitaux à l'investissement.
- Le droit sur l'actif social : les actionnaires ont un droit proportionnel à la quantité d'actions qu'ils possèdent sur le patrimoine de l'entreprise, déduction faite des dettes<sup>2</sup>. Ainsi, lors d'une augmentation de capital, les actionnaires ont une priorité sur les actions nouvellement émises.

Pour les seconds, nous pouvons distinguer :

- Le droit à l'information : ils ont accès à tous les documents relatifs à l'activité et aux résultats de la société.
- Le droit de vote, permettant lors de l'assemblée générale annuelle de fixer les dividendes, prendre des décisions de gestion, délibérer sur les comptes de la société.
- Le droit d'exercer en justice : les actionnaires mécontents de la gouvernance de l'entreprise peuvent poursuivre les administrateurs en justice. Précisons que ces derniers, élus par les actionnaires lors de l'assemblée générale, nomment le directeur général qui a en charge la gestion de la société.

##### *Évaluation comptable*

Pour évaluer une action, nous avons tout d'abord la valeur comptable simple, appelée valeur boursière ou de marché :

$$\text{Action} = \frac{\text{Capitalisation Boursière}}{\text{Nombre total d'actions existantes}}$$

Cette valeur est évaluée sur le marché par les différents acteurs qui estiment la valeur de l'actif net de la firme.

Comment ces derniers estiment la valeur de la firme ? Le processus d'évaluation peut être modélisé à l'aide de la théorie de l'efficacité des marchés que nous décrivons ici.

---

2. Lors d'une faillite, les actionnaires ne sont dédommages qu'après remboursement des créanciers qui sont prioritaires.

### *Efficiencia des marchés financiers*

La théorie des marchés efficients a atteint son point d'acmé dans la recherche financière autour des années 70. C'est au même moment la prédominance de la théorie des anticipations rationnelles en Économie. Cette dernière est en partie née de l'insatisfaction croissante ressentie par de nombreux économistes à l'égard des anticipations adaptatives développées par Milton Friedman.

En 1960, John Muth avance que la prévision des agents est "parfaite", sans être forcément exacte ; elle est fondée sur des lois de probabilité effectivement suivies par les phénomènes étudiés. Si des erreurs se produisent, elles ne peuvent pas être systématiques car sinon les agents rationnels s'en apercevraient et l'intégreraient dans leurs calculs.

Les anticipations rationnelles supposent l'équilibre permanent et l'autoréalisation de la croyance des agents. Le concept d'autoréalisation signifie que l'agent représente l'économie sous la forme d'un modèle, ce dernier étant à l'origine d'actions qui "engendrent" les situations qu'il décrit. Ainsi, les croyances des agents, de type walrassien, sont-elles considérées comme un paramètre que se donne "a priori" le modélisateur.

Robert Lucas introduit l'hypothèse des anticipations rationnelles au début des années 70. Les grands courants de pensée économique, les nouveaux classiques, les monétaristes et quelques keynésiens ont adopté cette théorie.

Cette revue rapide de la théorie économique de cette période est importante pour comprendre l'engouement de l'introduction des mathématiques (c'est en effet à ce moment aussi que Black et Scholes, en 1973 plus précisément, font l'hypothèse que les évolutions des prix des actifs suivent une marche aléatoire) et des prévisions parfaites en théorie financière, sur lesquelles se fonde la théorie de l'efficiencia.

En effet, l'Hypothèse d'Efficiencia des Marchés (HEM) financiers énonce l'idée que les prix spéculatifs des actifs (comme les actions) incorporent toujours et sans friction la meilleure information des valeurs fondamentales (prévision de bénéfices, etc.) et les évolutions des prix ne sont dues qu'à des changements dans cette information. L'information peut prendre différentes formes (série des prix passés, information publique ou privée), mais dans tous les cas, elle est entièrement intégrée par les prix.

Dans les années 80 et 90, des doutes ont commencé à poindre sur l'hypothèse d'efficiencia et les modèles traditionnels d'évaluation des actifs, tels le Capital Asset Pricing Model (cf. section 2.1.1). Mais, les chantres de cette dernière avançaient et avançaient toujours que cette théorie a certes, comme toute théorie, des hypothèses restrictives mais elle permet d'appréhender au mieux l'univers des marchés financiers ; les écarts à cette théorie ne sont que des anomalies. Parmi ces anomalies, nous pouvons citer la présence sur les marchés actions d'autocorrélations positives et stables entre les rentabilités d'aujourd'hui et celles du passé proche (phénomène de momentum), ainsi que des autocorrélations négatives dans le long terme (phénomènes de retour à la moyenne des prix).

Fama [9], auteur d'un modèle plus raffiné d'évaluation des actifs dans le cadre de l'efficiencia (modèle de Fama-French [10]), énonce bien l'enjeu : "Suivant la loi traditionnelle de la Science, l'efficiencia des marchés peut être seulement remplacée par un meilleur modèle". Et ce dernier doit satisfaire des critères rigoureux : "il doit spécifier ce qui dans la psychologie de l'investisseur permet d'expliquer simultanément les causes de sous-réaction à certains types d'événements et de sur-réaction à d'autres. [...] Et la théorie alternative doit avoir des hypothèses rigoureusement définies, elles-mêmes potentiellement rejetables par des tests empiriques".

Des auteurs sont ainsi parvenus à l'élaboration de cadres théoriques où les anomalies de l'efficiencia des marchés y sont les fondements, comme les phénomènes de sous et sur-réaction à la diffusion de l'information par exemple.

### *Valeur fondamentale d'une action*

L'HEM stipule que le prix observé d'un titre financier, quel qu'il soit, est égal à sa valeur fondamentale, définie comme le flux des revenus futurs actualisés auquel le titre donne droit. Ainsi, en supposant que les dividendes intègrent toute l'information sur les fondamentaux économiques du cours des actions, la valeur  $V_0^i$  du titre de la société  $i$  est définie par la somme actualisée de ses flux futurs générés, les dividendes  $D_t$ ,

jusqu'à la fin de sa vie (considérée comme infinie) :

$$V_0^i = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{D_t}{(1 + r_f + \rho^i)^t}$$

avec  $r_f$  le taux sans risque et  $\rho^i$  la prime de risque nécessitée par la firme  $i$  : cette dernière est égale en fait à la rentabilité de l'action à laquelle on soustrait le taux sans risque.

Nous verrons dans la section 2.1.1 qu'elle peut être expliquée par des facteurs de risque évalués sur le marché sur lequel est traitée l'action correspondante. Si l'efficience des marchés est vérifiée, ces derniers expliqueront totalement la prime de risque de l'action et la valeur  $V_0^i$  définira le juste prix ou *fair price* de l'action.

En effet, si la prime de risque est intégralement expliquée par les facteurs de risque, le marché l'évaluera de manière juste. Dans le cas échéant, la *vraie* prime de risque sera soit plus faible soit plus élevée que celle *pricée* par le marché, ce qui signifiera que la valeur fondamentale sera soit plus élevée soit plus faible et donc l'action sera soit sous-évaluée soit sur-évaluée.

Et dans ces cas, des possibilités d'arbitrage et de créer de la performance se présenteront donc. Nous introduisons ainsi avec ce premier instrument financier des sources de création potentielle de performance.

Une précision importante est à faire sur ce point. Il faut en effet souligner que la prime de risque est équivalente (au taux sans risque près) au coût issu de la détention du capital. Ce coût est *ex-ante*, et donc pas encore réalisé. Si le coût observé  $\rho^{\text{obs}}$  se révèle sur-évalué par les acteurs du marché par rapport au coût théorique  $\rho^{\text{th}}$ , alors il va diminuer pour tendre vers  $\rho^{\text{th}}$ , ce qui va faire augmenter la valeur de l'action et donc la rentabilité *ex-post*. Le coût du capital s'assimile donc (au taux sans risque près) à une prime de risque *ex-ante* et la rentabilité de l'action (au taux sans risque près) à une prime de risque *ex-post*. Malheureusement, dans la pratique, les deux primes de risque sont confondues car le coût du capital *ex-ante* est difficile à estimer (cf. modèles à facteurs de risque, section 2.1.1). On suppose donc que la rentabilité historique révèle aussi le comportement futur du coût du capital. Si aujourd'hui, la prime de risque *ex-post* est sur-évaluée, le coût du capital *ex-ante* appliqué pour l'actualisation sera sur-évalué, diminuera donc pour obtenir une rentabilité élevée, ce qui est cohérent avec la prévision préalable d'une prime de risque *ex-post* importante.

#### *Ratio financier d'évaluation*

Pour apprécier l'écart à la valeur fondamentale, nous pouvons utiliser un ratio financier d'évaluation. Classiquement, il est utilisé soit le Dividend-Price Ratio, soit le Price-Earning Ratio PER. Ce dernier va être préféré car le Dividend-Price Ratio est très influencé par les politiques financières des entreprises (rachat d'actions par exemple augmentant les dividendes distribués). Le PER d'un actif financier se définit comme le rapport du cours de l'actif au bénéfice annuel qu'il rapporte. Il exprime donc le délai de récupération de cet actif, c'est-à-dire le nombre d'années de bénéfices sur lesquelles on valorise l'actif. Le prix d'un titre sera alors le produit du PER avec les bénéfices. C'est un indice tout d'abord d'anticipation de croissance d'une société : plus les anticipations de croissance forte sont élevées, plus le PER sera important. Et, c'est un indicateur de cherté d'une société au sein d'un même secteur : en effet, une société ayant un PER plus faible que le PER moyen du même secteur, celle-ci sera considérée comme peu chère. C'est enfin un indicateur de valorisation : nous pouvons alors savoir si le PER est légitime ou non et donc son éloignement par rapport à un PER juste. Le processus des PER est souvent caractérisé par un phénomène de *retour à la moyenne*.

#### *Modèle de Gordon-Shapiro*

Enfin, il faut remarquer qu'il est difficile de calculer un prix à partir du modèle d'actualisation des dividendes : effectivement, il se fonde sur des flux de revenus futurs aléatoires et difficiles à estimer. Les investisseurs doivent en conséquences les anticiper sur la base des informations dont ils disposent. Le calcul de la valeur fondamentale va donc supposer des hypothèses réductrices. Le plus célèbre est le modèle de croissance perpétuelle défini par Gordon et Shapiro en 1956.

Ils supposent que le taux de croissance annuel des dividendes  $g$  est constant, comme le coût des fonds propres, ou *cost of equity* CE, de la société  $r$ . Ce dernier est la rentabilité minimum que les actionnaires pensent pouvoir retirer de leur investissement dans l'action de la société. En outre,  $g < r$  pour éviter que la valeur de l'entreprise soit infinie. En conséquence, nous avons :

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t} = D_0 \sum_{t=1}^{+\infty} \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^t \\ &= D_0 \frac{\frac{1+g}{1+r}}{1 - \frac{1+g}{1+r}} \quad \text{convergence d'une série géométrique de raison } |q| < 1 \\ &= D_0 \frac{1+g}{r-g} = \frac{D_1}{r-g} \end{aligned}$$

D'après ce modèle, l'action a une valeur fondamentale d'autant plus élevée que la part du bénéfice distribué est importante et que le coût du capital est faible, toutes choses égales par ailleurs. Ce modèle est néanmoins irréaliste : nous allons alors utiliser non plus des modèles d'évaluation à partir de l'actualisation des dividendes mais à partir du coût du capital. Ce dernier résume en effet l'incertitude concernant la distribution des dividendes : plus le coût des fonds propres est élevé, plus l'incertitude est importante et plus la valeur fondamentale est faible. Les financiers vont alors s'attacher à apprécier si le marché évalue à sa juste valeur le CE, et plus précisément la prime de risque de l'action égale au CE auquel on soustrait le taux sans risque. Le problème de l'évaluation de la valeur fondamentale d'une action va se déplacer sur celui de l'évaluation de la prime de risque. Nous développerons ces modèles dans la section 2.1.1.

## Obligations

Les obligations sont des titres de dette pour les entreprises et de créances pour les souscripteurs. Les obligations sont émises sur un marché primaire à un taux fixe généralement et négociées sur un marché secondaire avec un prix évoluant en fonction des taux émis sur le marché primaire. La société s'engage à rembourser le capital emprunté à une échéance déterminée et à verser un intérêt annuel. Les droits sont donc moins élevés que pour les actions mais les créanciers seront prioritaires lors du remboursement suite à un défaut de la société.

L'obligation est caractérisée par neuf éléments :

1. la valeur nominale ou faciale  $V$  définie à l'émission et à partir de laquelle sont calculés les intérêts ou coupons versés,
2. la maturité  $T$ , définissant la date de remboursement de l'emprunt obligataire,
3. la valeur d'émission qui peut être égale à la valeur nominale, l'émission est alors *au pair*, ou en-dessous caractérisant une prime à l'émission,
4. la valeur de remboursement, égal ou supérieur à la valeur nominale, et dans ce dernier cas, il existe donc une prime de remboursement,
5. le coupon  $C$ , définissant le montant des intérêts versés,
6. le taux nominal ou facial, il définit la valeur du coupon et donc le revenu de l'obligation. Il peut être fixe ou variable,
7. le taux de rendement actuariel  $r_t$ , définissant le rendement réel suite aux variations de taux sur le marché secondaire au temps  $t$ ,
8. la date de jouissance : date à partir de laquelle les intérêts sont calculés,
9. date de règlement : date à laquelle l'emprunt est liquidé.

La valorisation  $V_t$  d'une obligation en  $t$  va être similaire à celle d'une action, c'est-à-dire égale à la somme actualisée de ses flux futurs  $F$  composés des coupons et du remboursement final :

$$V_t = \sum_{\theta=t+1}^T \frac{F_\theta}{(1+r_t)^{\theta-t}} = \sum_{\theta=t+1}^{T-1} \frac{C}{(1+r_t)^{\theta-t}} + \frac{V}{(1+r_t)^{T-t}}$$

La valeur de l'obligation va évoluer de manière opposée à celle du taux de rendement actuariel : si les taux montent (baissent), la valeur de l'obligation sur le marché secondaire va diminuer (monter). Pour quantifier cette sensibilité de la valeur de l'obligation à la variation des taux, nous allons utiliser un concept fondamental : la duration.

La duration a été introduite par Macaulay en 1938 qui cherchait à comparer l'évolution des taux longs avec celle des taux courts. Réduire la différence entre ces taux à la maturité ne lui semblait pas adéquat car c'était réduire la *durée* de l'échéancier à son dernier flux. Par exemple, la *durée* d'un zéro-coupon de maturité 10 ans est simple à estimer puisque donnant lieu à un flux unique, la *durée* de l'échéancier est 10 ans. Or pour une obligation de même maturité mais donnant droit à un coupon annuel, ceci ne semble pas être juste : puisque des remboursements sont faits avant la maturité, la duration de l'échéancier des flux financiers devra être inférieure à celle du zéro-coupon. Macaulay va alors pondérer les différentes maturités des flux financiers de l'obligation pour déterminer la duration. Hicks en 1946 va exprimer cette dernière en fonction de la sensibilité  $S$  de la valeur de l'obligation  $V$  au taux  $r$ , en  $t = 0$ , en dérivant la variation relative de cette valeur  $V$  consécutive à la variation du taux  $r$  :

$$S = \frac{dV}{V} \frac{1}{dr} = -\frac{1}{1+r} \sum_{\theta=1}^T \frac{F_{\theta}}{V(1+r)^{\theta}} \theta = -\frac{1}{1+r} \sum_{\theta=1}^T \omega_{\theta} \theta = -\frac{D}{1+r}$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la duration  $D$  comme une moyenne pondérée des maturités  $\theta$  des flux financiers. La somme des poids  $\omega_{\theta}$  est bien égale à 1.

La duration peut enfin être vue comme la durée de vie moyenne actuarielle d'un titre obligataire. A la fin de cette durée de vie moyenne, et sous l'hypothèse d'une structure par termes plate et ne pouvant se déformer que parallèlement, l'investisseur est immunisé contre la variation de taux : le rendement de l'obligation est à partir de cette date au minimum égale au rendement actuariel initial. Ceci s'explique par la compensation avec le temps de la dévalorisation de l'obligation, par exemple, à cause de la hausse des taux, par le placement à des taux plus élevés des coupons récupérés.

Outre l'évolution de la valeur d'une obligation, nous pouvons être intéressés par la variation d'un portefeuille investissant dans une obligation. Sa variation va être composée de la capitalisation des coupons et de la variation de la valeur de l'obligation suivant les taux. Si nous notons  $O_t$  la valeur de ce portefeuille obligataire en  $t$ ,  $\Delta$  la pas de la périodicité (cf. tableau 2.2) et  $r_t$  le taux de marché, nous avons :

$$O_{t+\Delta} = O_t * \left[ (1+r_t)^{\Delta} - \frac{D}{1+r_t} (r_{t+\Delta} - r_t) \right]$$

La duration fait l'hypothèse sous-jacente que tous les taux ayant des maturités différentes évoluent de manière uniforme. Or la structure par termes des taux révèle que sa déformation n'est pas seulement uniforme mais intègre deux autres facteurs d'évolution : un facteur de pentification de la courbe de la structure par termes, ainsi qu'un facteur de courbure. L'étude des co-mouvements de la structure par termes à l'aide par exemple d'une Analyse en Composantes Principales met en exergue ces deux autres facteurs de déformation et permet d'améliorer la gestion du risque de taux.

### 1.3.2 Produits dérivés

Outre lever des fonds à l'aide des actions et des obligations, les entreprises ont besoin de s'assurer contre les incertitudes sur les prix qu'elles peuvent subir. Pour cela, elles vont utiliser un autre type de produit que l'on appelle produits dérivés, car dérivés des produits de base : actions, obligations, mais aussi matières premières, devises, etc. Ces produits existent depuis longtemps mais leur échange s'est amplifié avec l'ouverture du premier marché organisé des options de gré à gré à Chicago en 1973 et la publication la même année de l'article de Black et Scholes *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* publié en juin 1973 dans le Journal of Political Economy. Ils s'apparentent à des produits d'échange de risque ou encore d'assurance pour les entreprises contre les incertitudes grandissantes de l'époque sur les prix des instruments financiers fondamentaux.

Ces nouveaux instruments n'étaient pas si nouveaux que cela (cf. Bernstein [5]). L'innovation était non pas dans leur fonction mais dans leur distribution au travers de marchés organisés, ainsi que la formalisation de leur prix. En effet, dans l'Antiquité, Aristote raconte dans le livre I de *La Politique* l'histoire de Thalès le Milésien. Ce philosophe, instruit des astres, lut un hiver dans le ciel que la récolte d'olives à l'automne prochain serait très supérieure à la récolte habituelle. Il se garantit alors la priorité sur l'utilisation pour l'automne des presses de la région en échange d'une petite somme d'argent. Il négocia des prix faibles de location car la récolte était éloignée et personne ne prévoyait ce que Thalès anticipait. Lorsque l'automne arriva et que la récolte fût exceptionnelle, il y eût une très importante demande de presses. Thalès sous-loua celles qu'il détenait, pour un prix faible négocié l'hiver, à un prix beaucoup plus conséquent et devint ainsi riche. Cette histoire est la première sur l'utilisation d'*option d'achat*, l'un des produits dérivés les plus communs aujourd'hui.

Les produits dérivés peuvent être de deux natures différentes : les contrats à terme et les options négociables.

#### Contrats à terme

Une opération à terme est une opération au comptant différée dans le temps. L'acheteur et le vendeur se mettent d'accord sur les conditions d'un échange, qui s'effectuera à une date future (maturité) précisée par le contrat à terme. L'échange *doit* être exécuté. Le prix de l'échange est fixé à la date d'élaboration du contrat mais l'échange d'argent n'est effectif qu'à la maturité.

Par exemple, un industriel français achète en dollars des biens d'équipement aux États-Unis. Ces biens ne sont pas encore construits et donc livrables 2 ans plus tard. Or le prix a été fixé aujourd'hui à 1000\$. L'industriel français, qui a une trésorerie en euros, doit convertir le prix des équipements en dollars. Supposons que le taux de change cote aujourd'hui à 1 EUR = 1\$, l'industriel a besoin donc de 1000 EUR. Or cette *conversion* a le temps en 2 ans d'évoluer défavorablement pour l'industriel. Il va donc acheter un contrat à terme qui lui garantit le prix en dollars (contre euros) négocié aujourd'hui pour dans 2 ans. Il se couvre contre un risque de change. Si le cours du dollar s'élève, le taux de change vaut alors à la maturité par exemple 1 EUR = 0.5\$, et l'industriel est protégé : la contrepartie lui fournira 1000\$ contre 1000 EUR ; le contrat à terme lui permettra de payer ses biens non pas 2000 EUR (comme le voudrait le taux de change à la maturité) mais 1000 EUR (le prix aujourd'hui). Dans le cas contraire, comme l'échange est obligatoire, l'évolution favorable de baisse du dollars, par exemple à 1 EUR = 2\$ (l'euro s'apprécie), n'avantagera pas l'industriel français (il aurait pu payer le bien 500 EUR).

Le prix fixé aujourd'hui et correspondant au montant échangé à maturité d'un contrat à terme peut être calculé sans modélisation du cours du sous-jacent (devise dans notre exemple). En effet, nous utilisons le principe essentiel d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) sur les marchés, par lequel il est impossible de gagner de l'argent à coup sûr avec un investissement nul. Les *arbitragistes* contraignent à l'unicité des prix des produits dérivés : deux stratégies qui donnent le même flux à maturité ont la même valeur à n'importe quelle date précédant la maturité.

Soit  $F_t(S, T)$  le prix fixé par contrat à la date  $t$  auquel sera négocié le sous-jacent  $S$  à la maturité  $T$ . On l'appelle le prix *forward*. Soit en outre  $B(t, T)$  le prix en  $t$  d'un *zéro-coupon*, qui est un instrument financier

qui rapporte 1 à la maturité  $T$ . Pour se garantir de détenir le sous-jacent  $S$  en  $T$ , nous avons le choix entre 2 stratégies :

- souscrire un contrat à terme en  $t$  et verser  $F_T(S, T)$  en  $T$  contre le titre  $S$ ,
- acheter le titre  $S$  en  $t$  et le conserver jusqu'en  $T$ .

Ces 2 stratégies conduisent au même flux  $S_T$  en  $T$ . Pour garantir le paiement du contrat *forward* en  $T$ , il faut acheter la quantité  $F_t(S, T)$  de zéro-coupon, qui permettra de détenir à maturité le montant  $F_T(S, T)$ . A partir de l'égalité des flux à tout moment (AOA), nous avons :

$$F_t(S, T) * B(t, T) = S_t$$

et donc le montant échangé à la maturité du contrat à terme est fixé aujourd'hui ( $t = 0$ ) à :

$$F_0(S, T) = \frac{S_0}{B(0, T)}$$

### Options négociables

Les options négociables sont des contrats permettant (il n'y a pas obligation) à son détenteur d'acheter (*call*) ou de vendre (*put*) une certaine quantité de biens à un cours fixé à la signature du contrat, appelé prix d'exercice (*strike*)  $K$  à la date  $T$ , maturité de l'option (cas des options *européennes*) ou jusqu'à  $T$  (cas des options *américaines*).

Dans le cas de l'exemple de l'industriel français achetant un bien en dollars, il peut acheter une option d'achat européenne aujourd'hui, au lieu d'un contrat à terme, lui donnant le droit, suivant la situation à maturité, d'acheter les 1000\$ à 1000 EUR en  $T$ . Si le cours du dollar s'élève, alors il aura intérêt à exercer son option d'achat. Dans le cas contraire, il n'exerce pas son option et paye donc 500 EUR, ce qui est intéressant puisque la couverture protège de la hausse du dollar et donc l'industriel peut aussi, avec cet instrument, profiter de sa baisse. Cette différence, par rapport au contrat à terme, a cependant un coût puisque l'acheteur de l'option paye une prime à la signature du contrat. Le risque est limité à la prime payée. Cette dernière nécessite pour son calcul une modélisation plus complexe que la simple utilisation *statique* de l'AOA. En effet, le flux final (*payoff*) est plus complexe que celui du contrat à terme puisqu'il a un caractère optionnel et que la trajectoire du sous-jacent est à prendre en compte dans l'évaluation du prix de l'option.

L'objet de la suite du cours est non pas d'entrer dans les détails complexes de calcul stochastique de la prime d'une option (pour cela nous nous référons aux livres de Dana et Jeanblanc-Picqué [7], Lamberton et Lapeyre [15], et Musiela et Rutkowski [21]) mais d'en comprendre la logique sous-jacente. Nous nous intéresserons seulement à l'évaluation d'un call européen dans le cadre de Black et Scholes, sans entrer dans les calculs mais en développant ses hypothèses essentielles.

#### *Payoff d'un call européen*

Avant toutes choses, tentons d'exprimer le flux final ou *payoff* d'un call européen. A la maturité, en  $T$ , le profit réalisé par l'acheteur de l'option dépend de la valeur du sous-jacent par rapport au prix d'exercice du call. En effet, si la valeur du sous-jacent  $S_T > K$ , le détenteur du call exerce l'option puisque le sous-jacent est devenu trop cher. Il gagne donc la différence  $S_T - K$ , s'il revendait sur le marché, par exemple, instantanément le sous-jacent acheté au prix  $K$  et de valeur de marché  $S_T$ .

Au contraire, si  $S_T \leq K$ , il n'a aucun intérêt à exercer l'option d'achat, puisque le sous-jacent est moins cher sur le marché. Dans ce cas, il ne gagne rien (il a seulement payé la prime en 0).

Au final, nous pouvons exprimer le gain ou *payoff* final comme le maximum entre  $S_T - K$  et 0. Le *payoff* dépend donc de la valeur du sous-jacent à la maturité, par essence imprévisible. Ainsi :

$$\text{payoff} = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Nous voyons bien que l'acheteur d'un call européen anticipe donc une hausse du sous-jacent et se couvre ainsi contre le risque de hausse du marché. De manière symétrique, le vendeur anticipe une baisse (objectif de percevoir la prime sans que l'option s'exerce). Cette logique est valable aussi pour le put : l'acheteur se

couvre contre une baisse du sous-jacent.

*Effet de levier*

Le gain pour un call  $S_T - K$  possible est sans commune mesure avec celui fait sur le sous-jacent, relativement à l'investissement initial. Ce phénomène s'appelle l'effet de levier.

Lorsque l'on achète le sous-jacent d'un call à la monnaie en  $t$  de maturité  $T$ , la rentabilité est égale à :

$$r_{t|T} = \frac{S_T}{S_t} - 1 = \frac{S_T}{K} - 1$$

Lorsque l'on achète le call, la rentabilité est :

$$r_{t|T}^c = \frac{(S_T - K)^+}{C_t} - 1$$

Si  $S_T > K$ , alors le call est exercé et la rentabilité devient :

$$r_{t|T}^c = \frac{S_T - K}{C_t} - 1$$

Si  $S_T < K$ , alors le call n'est pas exercé et la rentabilité devient :

$$r_{t|T}^c = -100\%$$

Soit l'application numérique suivante :  $S_t = 98$ ,  $K = 100$  et  $C_t = 4.8$ .

Dans le cas où  $S_T = 107$  :

$$r_{t|T} = \frac{107}{98} - 1 = 9.2\%$$

$$r_{t|T}^c = \frac{107 - 100}{4.8} - 1 = 45.8\%$$

Dans le cas où  $S_T = 100$  :

$$r_{t|T} = \frac{100}{98} - 1 = 2.4\%$$

$$r_{t|T}^c = \frac{100 - 100}{4.8} - 1 = -100\%$$

L'achat de call est donc beaucoup plus risqué, à cause de l'effet de levier induit.

*Probabilité d'exercer un call*

La probabilité d'exercer le call est intégrée dans un indicateur appelé le Delta  $\Delta$  qui exprime la sensibilité de la variation du prix du call relativement à celle du sous-jacent. Cette sensibilité évolue au cours du temps, et plus elle est proche de 1, plus l'exercice est probable. Nous pouvons associer les valeurs du  $\Delta$  à la probabilité d'exercer le call ainsi qu'au payoff probable, dans les trois cas de figure suivants :

$\Delta$	Probabilité d'exercice	Payoff probable	Position
$\Delta \rightarrow 1$	Forte	$S_T > K$	Dans la monnaie
$\Delta \rightarrow 0.5$	Aussi faible que forte	$S_T = K$	A la monnaie
$\Delta \rightarrow 0$	Faible	$S_T < K$	En dehors de la monnaie

TABLE 1.1 – Delta et probabilité d'exercice

L'objectif du spéculateur va être d'acheter en dehors de la monnaie : en effet, le produit dérivé est alors peu cher, car la probabilité d'exercice est faible et la possibilité de gain importante, si le sous-jacent monte pour un call, baisse pour un put. L'effet de levier associé au produit dérivé permet alors de forts gains. Ceci explique pourquoi les échanges sur les produits dérivés ont explosé : ceci n'est pas seulement dû à leur utilisation par les entreprises mais surtout à celle faite par les spéculateurs.

### Évaluation d'un call européen Black-Scholes

L'objectif est d'évaluer le prix aujourd'hui en 0 d'un flux  $h(S_T) = (S_T - K)^+$  qui ne sera connu qu'à la maturité  $T$ . La méthode utilisée est de construire une stratégie  $\varphi$  qui réplique le même payoff  $h(S_T)$  en  $T$ . Nous aurons à notre connaissance le prix de ce portefeuille à tout instant et par là même, nous obtiendrons le prix du call en 0 par AOA. En effet, rappelons que deux stratégies ayant même flux en  $T$  auront même valeur  $\forall t$ .

La stratégie de réplication  $\varphi$  aura comme caractéristique essentielle l'auto-financement : un portefeuille auto-finançant est une stratégie dynamique d'achat et de vente d'actifs dont la valeur n'est pas modifiée par le retrait ou l'ajout de *cash* de manière extérieure. Les variations du portefeuille sont dues aux seules variations du cours des actifs. La stratégie va être une combinaison linéaire de 2 actifs : le sous-jacent (action, matière première, devise)  $S$  et l'actif sans risque  $S^0$ . Elle aura pour valeur  $V_t(\varphi) = \varphi_t S_t + \varphi_t^0 S_t^0$ . Dans le cadre de la modélisation de Black et Scholes, des hypothèses, assez restrictives mais permettant d'obtenir une écriture fermée du prix d'un call, sont énoncées :

- le sous-jacent (l'actif risqué) suit un mouvement Brownien géométrique sous la probabilité historique  $P$  dont l'équation différentielle stochastique (EDS) s'écrit  $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ , avec  $W_t$  un mouvement Brownien standard. Nous en concluons à partir du lemme d'Itô que  $S_t = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$  et donc les rentabilités du sous-jacent suivent une loi Normale  $\mathcal{N} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 \right)$ .
- l'actif sans risque (*cash*) est déterministe (non aléatoire) et sa dynamique est représentée par l'EDS  $dS_t^0 = S_t^0 r dt$ . Ainsi,  $S_t^0 = \exp(rt)$ .

Un résultat essentiel est la fait que si le processus actualisé  $\bar{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}$  (écrit dans le numéraire *cash*) est une martingale, alors la valeur financière actualisée  $\bar{V}_t(\varphi) = \frac{V_t(\varphi)}{S_t^0}$  d'un portefeuille auto-finançant est une martingale.

Nous allons donc déterminer une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à la probabilité  $P$  sous laquelle  $\bar{S}_t$  est une martingale. A partir du théorème de Girsanov, nous savons que le processus d'EDS  $d\bar{S}_t = \bar{S}_t \sigma d\bar{W}_t$ , avec  $\bar{W}_t = W_t + \lambda t$  et  $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ , est un mouvement Brownien sous  $\mathbb{Q}$ , probabilité appelée *risque-neutre* car l'actif risqué a même rendement que l'actif sans risque :  $dS_t = S_t(r dt + \sigma d\bar{W}_t)$  sous  $\mathbb{Q}$ . Nous avons tous les éléments essentiels au *pricing* d'un call européen.

Nous supposons le marché *complet*. Cette hypothèse implique que la probabilité *risque-neutre*  $\mathbb{Q}$  est unique et permet ainsi de garantir l'existence d'une stratégie  $\varphi$  auto-finançante qui réplique le flux final du call européen et dont la valeur actualisée est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ . En conséquence, le prix du call est unique. La stratégie  $\varphi$  a pour valeur à la maturité  $V_T(\varphi) = h(S_T) = (S_T - K)^+$  et ainsi  $\forall t \leq T$ , nous avons, avec la tribu  $F_t$  représentant l'information disponible à la date  $t$  :

$$\begin{aligned} \bar{V}_t(\varphi) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{V}_T(\varphi) | F_t] \\ V_t(\varphi) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(S_T) | F_t] \\ V_t(\varphi) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ h \left( S_t \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (\bar{W}_T - \bar{W}_t) \right) \right) | F_t \right] \end{aligned}$$

Or  $\bar{W}_T - \bar{W}_t$  est indépendant de  $F_t$  et  $S_t$  est  $F_t$  mesurable. Donc  $V_t(\varphi) = \Psi(T-t, S_t)$  avec :

$$\begin{aligned}\Psi(T-t, x) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ h \left( x \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (\bar{W}_T - \bar{W}_t) \right) \right) \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^x [h(S_{T-t})]\end{aligned}$$

Le prix du call européen  $C_0$  aujourd'hui, similaire à celui de la stratégie  $\varphi$   $V_0(\varphi)$ , est alors (nous ne décrivons pas ici les différents calculs qui aboutissent à ce résultat, cf. par exemple Musiela et Rutkowski [21]) :

$$C_0 = x\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_0)$$

avec  $x = S_0$ ,  $\Phi(\cdot)$  la fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite,  $d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \ln \frac{x}{K} \right]$

et  $d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T}$ .

Pour tout  $t < T$ , nous avons :

$$C_t = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_0)$$

avec  $d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \ln \frac{S_t}{K} \right]$  et  $d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T-t}$ .

Nous avons ainsi obtenu la formule fermée d'évaluation du prix d'un call européen dans le cadre de la modélisation de Black et Scholes.

Des modèles plus raffinés pour le *pricing* de produits dérivés ont été mis en place comme ceux à volatilité stochastique (Heston) par exemple prenant en compte la caractéristique non gaussienne des actifs financiers. Ceci n'est pas l'objet de ce cours.

#### Volatilité implicite

La volatilité est en effet dans la réalité non constante. Ceci est révélé par un indicateur très usité dans la pratique : la volatilité implicite.

Les agents des marchés financiers évaluent les calls et puts non pas à l'aide de leur prime mais à l'aide de l'unique paramètre pouvant être évalué différemment suivant les agents dans l'évaluation de Black-Scholes :  $\sigma$ . Et l'on va parler alors de volatilité implicite, déterminée comme la valeur de la volatilité que les agents ont utilisée pour pricer le produit dérivé. La relation entre prime du call, et du put, et volatilité implicite est positive : plus la volatilité implicite sera élevée, plus les agents anticiperont une variabilité importante et donc une incertitude du marché plus forte, et plus il coûtera cher d'acheter un produit dérivé étant donnée l'incertitude élevée concernant la valeur du sous-jacent à maturité.

Il est intéressant en outre de préciser que la volatilité implicite n'est pas constante suivant la position du strike par rapport à la valeur du sous-jacent : à la monnaie, la volatilité implicite est la plupart du temps à son point le plus bas, et plus on s'éloigne de la monnaie, plus elle est élevée. On appelle ce phénomène le *smile* de volatilité.

Ce *smile* se révèle être souvent un *skew*, car la volatilité implicite est plus élevée pour des valeurs du sous-jacent faibles (achat de puts pour se couvrir contre la baisse des marchés) que pour des valeurs élevées (achat de calls). En effet, la demande de couverture contre la baisse du marché est plus forte que celle contre la hausse : les agents seront plus sensibles au risque de baisse qu'au risque de hausse.

## CHAPITRE 2

# RISQUES FINANCIERS ET PERFORMANCE D'INVESTISSEMENT

### Préambule : la culture du risque dans nos sociétés contemporaines

En finance, les crises boursières ne viennent pas juste d'apparaître. Les deux précédents siècles en sont emplis. La considération du risque sur les marchés financiers et sa modélisation, sa mesure et sa gestion sont pourtant plus récents. Les crises des années 90 (Barings, NatWest, LTCM) pourraient expliquer le besoin qui s'est fait ressentir à ce moment-là de s'intéresser plus rigoureusement depuis 20 ans au risque avec notamment la mise en place du Comité de Bâle permettant de réguler les activités des institutions financières.

Une autre raison peut être aussi à chercher dans les progrès accomplis dans la puissance des outils informatiques ainsi que ceux faits en mathématiques à commencer par le pricing du call européen de Black-Scholes. Néanmoins, nous ne pensons pas qu'il n'y ait que cela. Il faut pour le comprendre ne pas se concentrer seulement sur la sphère financière mais étudier les évolutions de la société dans sa globalité. En effet, la mutation de nos sociétés occidentales ces 20 dernières années peuvent aussi être un élément d'explication qu'il ne faudrait pas négliger. Et cette mutation, facteur essentiel de l'évolution actuelle des marchés financiers, est l'émergence d'une société du risque.

Le mot risque a pour étymologie le latin *rescum* signifiant "ce qui coupe" et caractérisant donc une menace. Ce mot est apparu dans son sens actuel au XIV<sup>e</sup> siècle dans les assurances maritimes italiennes. Aujourd'hui, ce terme se retrouve dans presque tous les événements qui touchent nos sociétés allant des risques technologiques, écologiques, sanitaires à la circulation automobile et à l'insécurité de nos villes.

Pour appréhender ces risques, les experts chiffrent leur danger. Patrick Peretti-Watel [22] illustre cela à l'aide de l'épisode de l'explosion d'un réacteur chimique produisant des herbicides à Seveso en Italie le 10 juillet 1976. Les dangers sur les femmes enceintes n'étant pas négligeables, les habitants voulurent alors absolument savoir quel était le pourcentage de femmes pouvant avoir des séquelles. Des situations similaires dans le passé n'existant pas, il s'avérait impossible de quantifier ce danger. Or les habitants demandaient de manière insistante un chiffre, qu'a fini par leur donner un expert avec le pourcentage 30%. Malgré le peu de fondement que représentait ce chiffre, il rassura les habitants.

Ainsi, pour maîtriser un danger, le fait de le quantifier permet de le gérer même si dans certains cas le chiffre donné ne signifie rien car la situation n'est pas probabilisable. Peretti-Watel décrit l'exemple du patron de la marque de whisky Cutty Stark qui avait proposé une énorme récompense à celui qui découvrirait le monstre du Loch Ness. Bien sûr celui-ci n'existe pas. Mais certainement par paranoïa, il se couvrit de la découverte de ce monstre en souscrivant une assurance chez Lloyd's. La prime de cette assurance a dû être difficile à déterminer sachant qu'elle se fondait sur un événement impossible.

Enfin, pour gérer les risques, il faut faire des choix politiques. En effet, de nombreux seuils vont être déterminés pour savoir si une situation présente un danger ou pas. Il en est ainsi de la détection de la trisomie par amniocentèse qui demande des examens très lourds pour la femme enceinte et assez risqués : des méthodes de dépistage sanguin ont pu être développés mais avec une incertitude. Le seuil défini est donc issu d'un choix politique d'une responsabilité importante. A la fin des années 80, ce principe du seuil, sous-jacent au principe de précaution, a connu un fort succès. Et ce principe a été fortement développé dans de nombreux domaines comme la santé, l'environnement, la génétique, la sécurité au travail ou encore la finance : ainsi le comité de Bâle a défini les premiers accords de réglementations bancaires Bâle I en 1988 à l'aide d'un ratio déterminant un montant de réserve permettant aux institutions financières de se couvrir contre un risque de perte élevée. La difficulté fut alors de définir ce montant ou ce seuil de perte potentielle. Ces différentes réglementations sont donc difficiles à quantifier scientifiquement car fondées sur des probabilités extrêmes. Le ratio du comité de Bâle subit une incertitude relativement importante. Et ces réglementations ne permettent pas d'éviter toutes les crises : récemment, durant l'été 2007, la crise des subprimes n'a pas pu être évitée malgré les précautions normalement édictées. Mais comme la nécessité de la mesure, nous l'avons vu, est essentielle d'un point de vue sociétale, il faut en accepter les limites. La science a tout de même progressé et applique aujourd'hui les résultats de théories probabilistes (théorie des valeurs extrêmes, théorie des copules) pour obtenir des mesures des risques extrêmes plus précises. Malheureusement, ces techniques ne sont pas encore assez développées.

Nos sociétés contemporaines ont donc développé une importante culture du risque. Selon Giddens [11], le risque est mobilisé par tout individu comme mode de représentation du quotidien. La société est en effet davantage orientée vers le futur et moins ancrée dans le passé et les individus mettent en oeuvre une rationalité probabiliste pour évaluer les conséquences de leurs actions. Le futur devient donc un territoire à coloniser.

Beck [3], un autre sociologue travaillant sur ces problématiques, a montré les évolutions de l'individu de nos sociétés : il doit se projeter dans le futur en essayant de le contrôler et en refusant le déterminisme. La société industrielle traditionnelle était caractérisée par la lutte souvent collective contre la pauvreté et le déclin. Aujourd'hui, l'individu est livré à lui-même faisant face à une multitude de risques.

Les marchés financiers sont aussi le miroir de cette culture du risque imprégnant nos sociétés contemporaines. Les krachs boursiers font peur et peuvent affecter l'existence de tout un chacun. En outre, les agents de ces marchés "créent le futur qu'ils tentent de coloniser" selon Peretti-Watel : effectivement, entretenant eux-mêmes la volatilité des marchés financiers, ils créent les risques financiers imprévisibles qu'il leur faudra évaluer et gérer.

Voici un point de vue paru dans Ouest France le 16 décembre 2008.

## **Climat, finance, même combat**

En attendant l'engagement de l'équipe Obama dans la lutte contre le réchauffement climatique, la conférence de Poznan a montré que les bases d'un accord international étaient difficile à réunir.

Or les erreurs à l'origine de la crise financière doivent nous convaincre de l'urgence à mettre en place des mesures courageuses contre le changement climatique. Ces erreurs ont déjà été énoncées : désengagement de l'Etat providence, laisser-aller sur les marchés financiers, excès d'innovations financières ne créant pas ou peu de valeur, endettement excessif, spéculation non régulée. Une idée relie ces évolutions : celle d'une faible perception du risque.

Si par exemple les responsables ont laissé l'Etat providence disparaître peu à peu, c'est entre autres à cause d'une perception de l'avenir sans embûches : sinon, pourquoi se doter d'un système de redistribution des richesses performant, car la pauvreté serait un risque éloigné ? Autre exemple : si les prêteurs américains ont été généreux avec les ménages subprimes, c'est parce-que le risque de baisse de la valeur de l'immobilier était perçu comme improbable. Aujourd'hui, ces deux percep-

tion non régulée. Une idée relie ces évolutions : celle d'une faible perception du risque. Si par exemple les responsables ont laissé l'Etat providence disparaître peu à peu, c'est entre autres à cause d'une perception de l'avenir sans embûches : sinon, pourquoi se doter d'un système de redistribution des richesses performant, car la pauvreté serait un risque éloigné ? Autre exemple : si les prêteurs américains ont été généreux avec les ménages subprimes, c'est parce-que le risque de baisse de la valeur de l'immobilier était perçu comme improbable. Aujourd'hui, ces deux percep-

tions se sont inversées.

Pourtant, nos sociétés avaient développés depuis la fin des années 80 (le livre de Beck publié en 1986 *La société du risque : sur la voie d'une autre modernité* est très éclairant) une perception réelle du risque collectif à la suite de drames, comme Tchernobyl, ou, d'un point de vue financier, après le krach d'octobre 1987. Les politiques avaient mis en place de régulations.

Dans le domaine financier, les premiers accords de Bâle ont vu le jour en 1988 avec l'objectif affiché d'éviter la contagion de faillites bancaires à tout le système financier, en contraignant les banques à conserver une partie de leurs fonds propres en réserve. Malheureusement, on constate l'échec de ce système de régulations. Pourquoi ? Car la perception aigüe du risque développée dans les années 80 a été délaissée au profit des rendements à court-terme, proposés par les innovations financières des années 90, ainsi que ceux des bulles technologique et immobilière des années 2000.

Ce qui empêche de percevoir le risque, c'est la rentabilité attendue. En finance, on a l'habitude de parler de couple rendement-risque pour dire que le risque évolue avec le rendement. Le problème, très bien décrit par Frédéric Lordon dans son dernier livre *Jusqu'à quand ? Pour en finir avec les crises financières*, est que le risque se mesure seulement après qu'on a réalisé l'investissement : il est

difficile en effet de prévoir le risque encouru. L'auteur va jusqu'à affirmer que "le contrôle des risques est une chimère".

Dans les banques, évaluer le risque engagé est complexe ; c'est néanmoins possible si l'on comprend que risque et rendement sont deux notions non reliées dans le temps : le rendement est une notion de court-terme et le risque une notion de long-terme. Admettre cela permet de poser des règles : augmenter la réserve de fonds propres des banques lorsque l'environnement économique est favorable (rendement bon et perception faible du risque) pour pouvoir la diminuer dans le cas contraire (rendement mauvais et perception forte du risque). De telles règles auraient permis aux banques de moins participer à la bulle et de pouvoir répondre aux pertes actuelles sans faire appel à l'Etat.

Revenons au changement climatique. La perception des risques est encore faible, alors que les rendements retirés de la consommation du pétrole par exemple sont élevés pour nos sociétés. Il apparaît urgent que les politiques définissent des règles plus volontaires d'économies d'énergie, certes contraignantes aujourd'hui, mais qui nous permettront d'éviter le pire dans quelques années. Forcer les banques à moins investir d'argent pendant la bulle aurait été salvateur... Et c'est le rôle du Politique de définir les conditions nécessaires aujourd'hui pour bien vivre ensemble.

## 2.1 Mesurer les risques financiers

Nous allons étudier plus précisément dans cette section la mesure du risque de variations des cours sur les marchés financiers : ceci correspond à ce que nous dénommons le risque de marché. L'étude de la mesure d'autres risques, comme le risque de crédit ou le risque opérationnel, dépasse le cadre de ce cours introductif et fera l'objet de cours approfondis.

### 2.1.1 Modèles à facteurs de risque

#### Capital Asset Pricing Model

Le Capital Asset Pricing Model (CAPM) ou Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers (MEDAF) a été développé par Sharpe en 1964 [23], Lintner en 1965 [17] et Mossin en 1966 [20]. Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

1. les investisseurs exigent une rentabilité d'autant plus forte que le risque est élevé : il existe donc une relation croissante entre rendement et risque,
2. un actif sans risque est disponible,
3. les anticipations sont identiques pour tous les investisseurs.

D'après ces hypothèses, nous pouvons exprimer l'espérance de la rentabilité  $R_i$  d'un portefeuille ou d'un actif risqué  $i$  en fonction de celle de l'actif sans risque  $r_f$  et de celle du portefeuille de marché  $R_M$ , qui est celui que tous les investisseurs possèdent :

$$\mathbb{E}(R_i) = r_f + \beta_i[\mathbb{E}(R_M) - r_f] \quad \text{avec } \beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

avec  $\sigma(\cdot)$  la volatilité de l'actif correspondant et  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$  la fonction covariance. Pour des raisons pédagogiques, nous n'entrons pas dans la démonstration de ce modèle mais expliquons les conséquences empiriques et pratiques de cette modélisation de la prime de risque.

Nous pouvons aussi réécrire ce modèle de la manière suivante :

$$\rho_i = E(R_i) - r_f = \beta_i[E(R_M) - r_f] \quad (2.1)$$

pour faire apparaître la prime de risque  $\rho_i$ . Ainsi, plus les investisseurs seront exposés au portefeuille de marché, plus ils prendront de risque et plus leur rémunération consécutive potentielle sera théoriquement élevée.

Ce modèle explique donc la prime de risque d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs  $i$  par sa sensibilité  $\beta_i$  par rapport au portefeuille de marché. Cette dernière dénote le caractère plus ou moins agressif d'un actif relativement au portefeuille de marché. Ainsi, si  $\beta_i > 1$ , l'actif est dit "offensif", et si  $\beta_i < 1$ , il est dit "défensif" relativement au marché considéré ( $\beta_i = 1$  correspond à une prise de risque similaire à celle prise par le portefeuille de marché). L'indicateur  $\beta$  est très utilisé par les praticiens car simple d'utilisation.

Cependant, outre les hypothèses restrictives du modèle d'équilibre, il possède aussi quelques limites de mise en oeuvre empiriques.

Tout d'abord, il est difficile de déterminer précisément le portefeuille de marché. Souvent, il est réduit à l'indice phare de la place financière dans laquelle est évalué l'actif ou le portefeuille. Seulement, ces indices n'intègrent pas tous les actifs risqués de l'univers d'investissement, comme le voudrait la théorie, puisqu'il se restreint aux actions.

Les poids alloués aux actions dans ces indices varient suivant les places financières. Ils peuvent être relatifs :

- à la valeur des titres : c'est le cas du plus vieil indice fondé en 1884, le Dow Jones Industrial Average composé de 30 entreprises américaines importantes,
- aux capitalisations boursières,

- et au flottant, défini comme la part de la capitalisation que l'on peut échanger sur les marchés (inférieur le plus souvent à la capitalisation boursière totale), traduisant donc la liquidité du titre. La pondération par le flottant est le cas de la plupart des indices aujourd'hui. Ainsi, le CAC 40 l'est depuis le 1er décembre 2003, après avoir été pondéré par les capitalisations.

Les créances bancaires, l'immobilier, le capital humain manquent donc dans la composition de ces indices et sont difficiles à mesurer précisément.

En outre, la seconde limite concerne l'estimation des  $\beta$ . Le modèle de régression sous-jacent au CAPM s'écrit :

$$\rho_i = R_i - r_f = \alpha_i + \beta_i[R_M - r_f] + \varepsilon_i$$

Le premier problème qui apparaît est l'instabilité des  $\beta_i$  suivant les périodes d'estimation. En effet, ils peuvent évoluer très fortement. Quelles méthodes d'estimation utiliser alors pour éviter l'instabilité des  $\beta$ ? Quelle période considérer? L'une des solutions la plus intéressante est l'utilisation du filtre de Kalman (dont l'étude dépasse le cadre de ce cours) permettant de calibrer des  $\beta$  très réactifs : cette technique permet de s'exonérer de l'inertie propre au Moindres Carrés Ordinaires.

Le second problème est la significativité possible de  $\alpha_i$ . Théoriquement, le CAPM implique l'absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) entre les actifs, c'est-à-dire qu'en théorie la relation (2.1) est toujours vérifiée. Si cela n'est pas le cas, l'actif est mal évalué et selon l'HEM, l'anomalie sera résorbée rapidement par les arbitrageurs et ne devrait pas perdurer. Néanmoins, dans la réalité, des  $\alpha_i$  significativement non nul perdurent plus longtemps que prévu par l'HEM. Cela peut alors signifier deux choses :

- Soit le modèle n'est pas à remettre en cause et alors la prime de risque observée, assimilée au coût du capital moins le taux sans risque,  $\rho_i^{\text{obs}}$  est arbitrageable mais les arbitrageurs de la théorie ne sont pas aussi efficaces que prévu. Alors une rentabilité *gratuite* apparaît dans le cas où  $\alpha_i$  est par exemple positif :  $\rho_i^{\text{obs}} = \alpha_i + \rho_i^{\text{th}} \Leftrightarrow \rho_i^{\text{th}} = \rho_i^{\text{obs}} - \alpha_i$ . Le modèle est supposé bon, donc la prime de risque *ex-ante*  $\rho_i^{\text{obs}}$  devrait diminuer pour atteindre la prime de risque théorique  $\rho_i^{\text{th}}$  et donc le prix de l'action augmenter. L'action est bien sous-évaluée. Le marché est alors inefficace pour l'actif  $i$  considéré. La rentabilité sera élevée puisqu'une partie *gratuite*  $\alpha_i$  est présente.
- Soit la prime de risque n'est pas entièrement décrite par sa seule sensibilité au portefeuille de marché. D'autres facteurs de risque sont certainement évalués par les intervenants des marchés. Fama et French ont ainsi proposé un modèle d'équilibre plus réaliste complétant le CAPM des autres facteurs de risque pouvant être rémunérés par la prime de risque.

### Modèle de Fama-French

Le modèle de Fama et French [10] développé en 1993 correspond à un raffinement du Capital Asset Pricing Model. Il explique la rentabilité espérée d'un portefeuille ou d'une action  $\mathbb{E}(r_i)$  en excès du taux d'intérêt sans risque  $r_f$  par la sensibilité de sa rentabilité à l'espérance de trois facteurs de risque non diversifiables :

1. la rentabilité en excès d'un portefeuille de marché  $R_M - r_f$  (correspondant au facteur de risque du CAPM),
2. la différence entre la rentabilité d'un portefeuille d'actions de petite taille, la taille étant évaluée par la capitalisation boursière, et la rentabilité d'un portefeuille d'actions de grande taille (SMB, *Small Minus Big*),
3. la différence entre la rentabilité d'un portefeuille d'actions à faible valorisation, la valorisation étant évaluée par le ratio financier *book-to-market*<sup>1</sup>, ces actions sont alors caractérisées de *Value*, et la rentabilité d'un portefeuille d'actions à importante valorisation financière, ces actions sont alors caractérisées de *Growth* (HML, *High Minus Low*).

Formellement, nous avons l'expression de la prime de risque suivante :

$$\rho_i = \mathbb{E}(R_i) - r_f = \beta_i(\mathbb{E}(R_M) - r_f) + s_i\text{SMB} + h_i\text{HML}$$

1. Les actions à faible valorisation financière sont alors celles ayant un fort *book-to-market*.

Le modèle de régression correspondant s'écrit :

$$\rho_i = R_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(R_M - r_f) + s_i\text{SMB} + h_i\text{HML} + \varepsilon_i$$

Les facteurs sont déterminés empiriquement de manière à éviter l'overlapping. Dans ce but, il va falloir construire six portefeuilles :

	< Médiane Capitalisation	≥ Médiane Capitalisation
≥ décile 70% book-to-market	Small Value	Big Value
	Small Neutral	Big Neutral
< décile 30% book-to-market	Small Growth	Big Growth

TABLE 2.1 – Six portefeuilles Fama-French

Ainsi, nous pouvons calculer les rentabilités des portefeuilles SMB et HML à partir de celles de ces six portefeuilles :

$$\begin{aligned} \text{SMB} = & \frac{1}{3}(\text{Small Value} + \text{Small Neutral} + \text{Small Growth}) \\ & - \frac{1}{3}(\text{Big Value} + \text{Big Neutral} + \text{Big Growth}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{HML} = & \frac{1}{2}(\text{Small Value} + \text{Big Value}) \\ & - \frac{1}{2}(\text{Small Growth} + \text{Big Growth}) \end{aligned}$$

Ce modèle parvient empiriquement à expliquer, souvent entièrement, la prime de risque d'un portefeuille. Il améliore donc le CAPM. Néanmoins, dans certaines situations, il est possible de créer des portefeuilles dont les primes de risque échappent à l'explication du modèle de Fama-French : il reste alors encore un  $\alpha_i$  significatif. De la même manière que pour le CAPM, cette anomalie peut signifier une inefficience d'évaluation de l'actif ou une remise en cause du modèle. Dans ce dernier cas, Carhart [6] a ainsi développé un modèle d'évaluation incorporant le momentum de prix d'un actif (cette *anomalie* célèbre a été développée par Jegadeesh et Titman [14]).

Ces situations d'arbitrage ont permis de développer aussi d'autres modèles d'évaluation des actifs comportant de nouveaux facteurs de risque complétant le modèle de Fama-French, mais nous ne les étudierons pas ici.

### 2.1.2 Mesure synthétique du risque

Les modèles à facteurs de risque que nous venons d'étudier ont un intérêt essentiel pour décrire les sensibilités d'un actif financier ou d'un portefeuille à un (CAPM) ou trois facteurs de risque (Fama-French). L'inconvénient est la difficulté de ces modèles à apprécier le risque global d'un portefeuille composé d'actifs hétérogènes, n'ayant par exemple pas le même portefeuille de marché : dans ce cas, il est très difficile d'agréger les différentes sensibilités. Il est alors préférable de déterminer une mesure synthétisant le risque global du portefeuille. Cette mesure synthétique sera alors issue de la distribution des rentabilités<sup>2</sup> du portefeuille. L'une de ces mesures, très usitée par les praticiens, est la volatilité.

#### La volatilité

Soit  $R$  le vecteur des rentabilités de l'actif ou du portefeuille considéré. La volatilité notée  $\sigma$  correspond à l'écart-type de ces rentabilités :

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[(R - \mathbb{E}(R))^2]}$$

Avant d'évaluer ce critère, il faut préciser une spécificité de calcul. Nous observerons dans la suite les évolutions des rentabilités d'indices boursiers de périodicité hebdomadaire<sup>3</sup>. Il nous faut pouvoir les comparer à des volatilités calculées sur des périodicités différentes, puisque la volatilité augmente avec l'intervalle de temps noté  $\Delta$  défini entre les rentabilités.

Ces dernières sont calculées de la manière suivante. Soit  $V_t^P$  la valeur en  $t$  du portefeuille et  $V_{t+\Delta}^P$  la valeur en  $t + \Delta$ , alors la rentabilité du portefeuille  $R_{t|t+\Delta}^P$  calculée sur l'intervalle de temps  $\Delta$  est égale à :

$$R_{t|t+\Delta}^P = \frac{V_{t+\Delta}^P}{V_t^P} - 1.$$

Ainsi, intuitivement, nous pouvons vérifier, comme annoncé plus haut, que plus l'intervalle de temps va augmenter, plus les rentabilités auront une valeur absolue importante et donc la volatilité va croître.

Sous l'hypothèse de normalité et d'indépendance des rentabilités, nous pouvons calculer une volatilité annuelle à partir de n'importe quelle périodicité : il suffit de multiplier la volatilité par un facteur égal à la racine carrée de l'inverse de l'intervalle de temps  $\Delta$  considéré.

Ce dernier vaut suivant les périodicités :

Périodicité	$\Delta$	Facteur
Quotidienne	$\frac{1}{261}$	$\sqrt{261}$
Hebdomadaire	$\frac{1}{52}$	$\sqrt{52}$
Mensuelle	$\frac{1}{12}$	$\sqrt{12}$

TABLE 2.2 – Facteur multiplicatif suivant la périodicité

Le facteur appliqué à la périodicité quotidienne est différent suivant la zone géographique considérée : en effet, le nombre de jours fériés, et donc non tradés, diffère suivant le pays.

2. Nous expliquerons l'intérêt d'utiliser les rentabilités dans la section 2.2.1.

3. Cette périodicité est la plus intéressante car les données quotidiennes possèdent trop de bruit et celles mensuelles ne sont pas assez représentatives de la dispersion réelle des rentabilités car elles sont alors démesurément lissées.

Un simple exemple va nous permettre d'appréhender l'intérêt de cette mesure. Observons sur un même graphique les évolutions entre le 8 janvier 1999 et le 8 juin 2007 de l'indice européen MSCI Europe et du taux d'intérêt Euribor 3 mois, ainsi que de leurs rentabilités hebdomadaires.

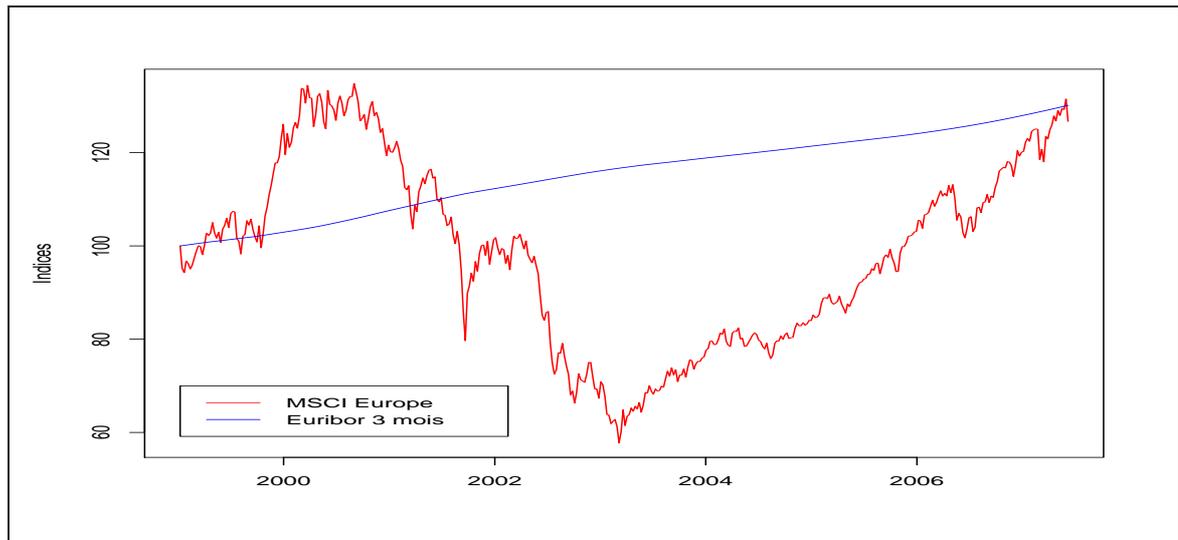


FIGURE 2.1 – Évolutions des indices du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois

Nous remarquons sur les Figures 2.1 et 2.2 que la variation des indices et la dispersion des rentabilités sont plus importantes pour le MSCI Europe que pour l'Euribor 3 mois. Ceci va donc se répercuter automatiquement sur l'indicateur statistique de dispersion que représente la volatilité.

En effet, la volatilité annualisée du MSCI Europe sur la période observée est de 16.99% et celle de l'Euribor 3 mois de 0.12%. Il ne fait alors aucun doute que le MSCI Europe est plus risqué que l'Euribor 3 mois. Cette conclusion aurait pu être tirée de la connaissance de ces deux indices : en effet, le MSCI Europe est composé d'actions alors que l'Euribor 3 mois est un taux d'intérêt ayant un risque quasi-nul de perte. Etant donné qu'un portefeuille d'actions peut subir des pertes potentielles importantes contrairement à l'Euribor 3 mois, il était évident que l'on aboutisse à la conclusion précédente. Mais la volatilité a permis de quantifier la différence de risque de perte des deux indices. A l'aide de cet indicateur synthétique, nous pouvons donc hiérarchiser les deux indices et déterminer leur niveau de risque de pertes potentielles. Ceci aurait été difficile à réaliser avec le CAPM par exemple et sa sensibilité  $\beta$  : quel portefeuille de marché commun à ces deux indices ? Et quand bien même ce portefeuille de marché aurait été défini, aurait-on été certain des présupposés théoriques du CAPM ? En effet, d'autres facteurs de risque omis n'auraient-ils pas été évalués dans la prime de risque ? La volatilité calibrée sur les données historiques évite ces problèmes de modèle.

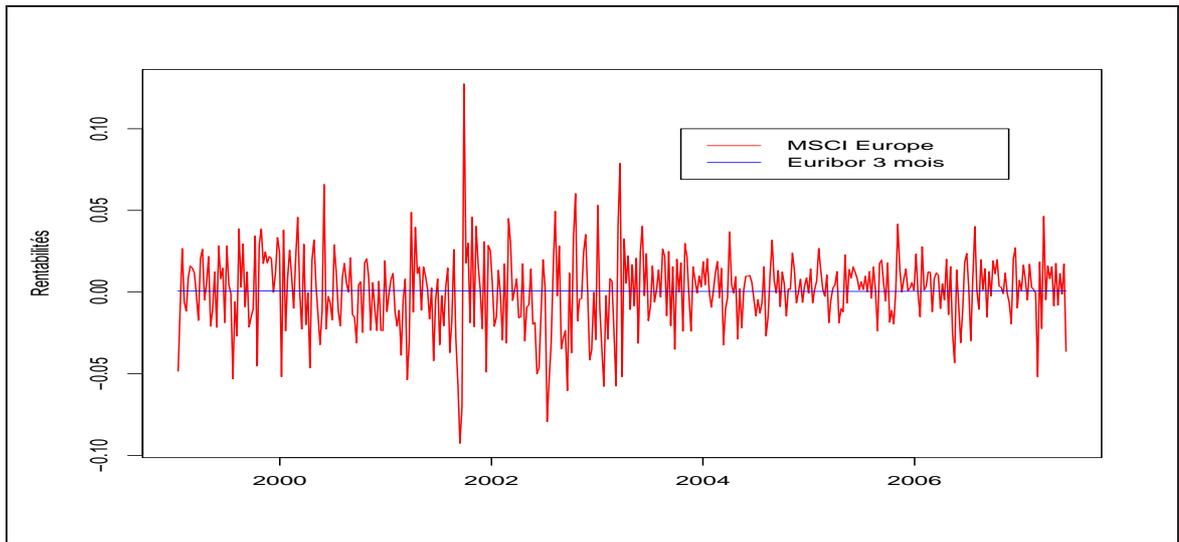


FIGURE 2.2 – Évolutions des rentabilités du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois

Néanmoins, elle n'est pas exempte de tout inconvénient. Effectivement, lorsque les données viennent à manquer, il va devenir difficile de calculer une volatilité robuste. Il va falloir alors modéliser les rentabilités des actifs considérés à l'aide d'une loi de probabilité (la loi Normale par exemple) ou d'un modèle statistique (ARMA-GARCH par exemple). Si nous souhaitons créer un produit financier n'ayant pas encore d'existence et dont nous voulons évaluer le risque, il va falloir le modéliser pour en déterminer la volatilité. Le risque de ne pas utiliser un modèle adéquat entre alors en jeu.

Enfin, un dernier défaut est révélé par la Figure 2.3.

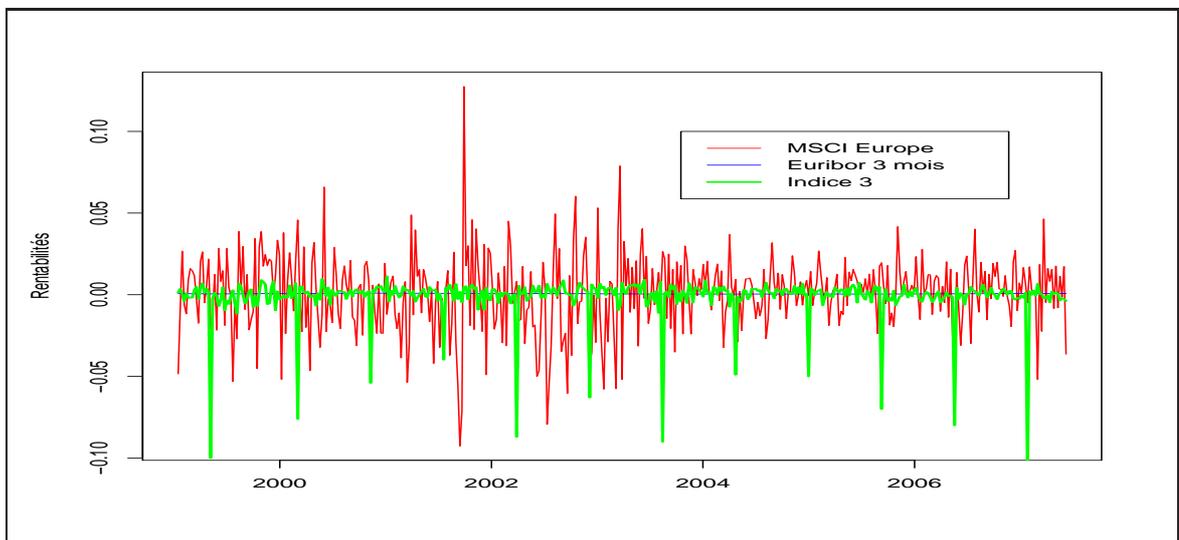


FIGURE 2.3 – Évolutions des rentabilités du MSCI Europe, de l'Euribor 3 mois et de l'indice 3

Nous pouvons observer à nouveau les évolutions des rentabilités du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois mais aussi d'un actif dont la dispersion est plus originale. Les volatilités nous feraient conclure à un risque plus élevé de pertes pour le MSCI Europe car la volatilité annualisée de l'Indice 3 est plus faible et vaut 9,38%. Or il est évident à partir de la Figure 2.3 qu'investir dans l'Indice 3 est plus dangereux car des

pertes très fortes peuvent apparaître avec une probabilité significative.

Nous observons aussi ces caractéristiques à partir du graphe des distributions empiriques des deux indices financiers MSCI Europe et Indice 3 de la Figure 2.4. Nous avons déterminé, au lieu des histogrammes, les densités estimées non-paramétriquement par un noyau gaussien. Ainsi, la queue des pertes est plus épaisse pour l'indice 3 ce qui est un inconvénient lorsque l'on détermine le risque par la seule volatilité qui est un indicateur du risque moyen et ne capte donc pas cela.

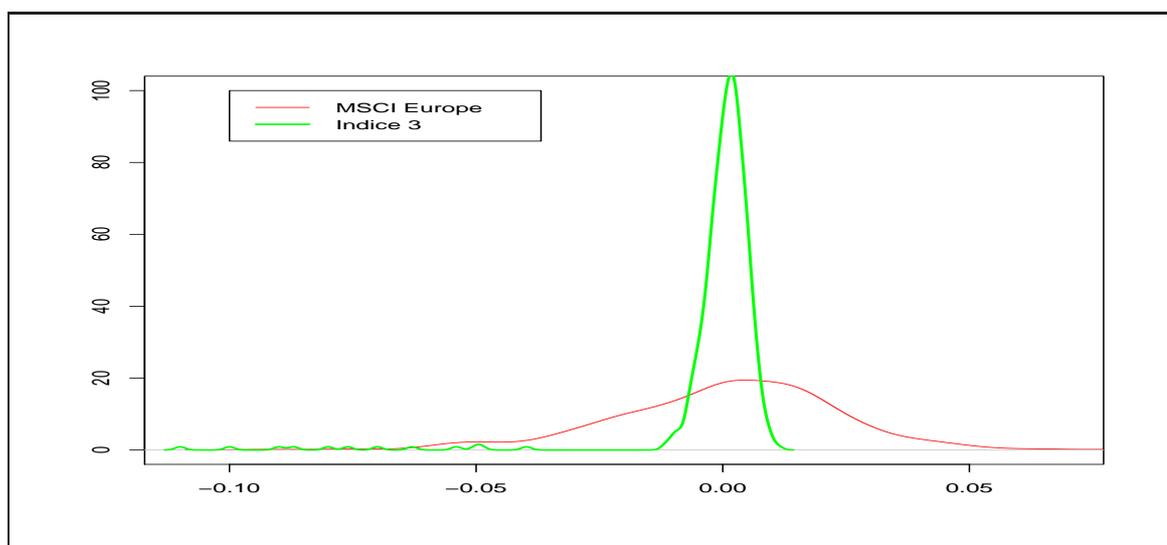


FIGURE 2.4 – Densités des rentabilités du MSCI Europe et de l'indice 3

Cet inconvénient va nous permettre de créer une autre mesure synthétique du risque pouvant hiérarchiser les 3 indices plus correctement, c'est-à-dire reconnaissant dans l'indice 3 l'actif financier le plus risqué en termes de pertes potentielles. Cette mesure est le quantile de perte maximale que peut subir l'actif ou le portefeuille avec une probabilité d'occurrence faible mais non négligeable pour l'investisseur : on la dénomme la Value-at-Risk ou VaR. Ainsi, pour nos trois indices, nous avons les VaR suivantes définies avec une probabilité à 1% en comparaison des volatilités annualisées :

Indice	Volatilité annualisée	VaR 1%
Euribor 3 mois	0.12%	0.04%
MSCI Europe	16.99%	-5.77%
Indice 3	9.38%	-7.85%

TABLE 2.3 – Volatilités et VaR des trois indices

Cela prouve bien que la VaR détermine une hiérarchie correcte du risque de pertes d'un actif financier, contrairement à la volatilité.

### La Value-at-Risk

La VaR représente une perte potentielle dont il faut définir la **probabilité**  $\alpha$  d'occurrence, appelée aussi niveau de confiance, ainsi que l'**horizon**  $h$  de durée d'investissement. Par exemple, une probabilité de 1% pour un horizon  $h$  de un jour revient à accepter que la perte potentielle ne dépasse la VaR que 2 à 3 fois par an (1 an = 251 jours ouvrés). L'horizon représente la durée sur laquelle nous estimons le risque, c'est-à-dire le temps nécessaire pour couvrir la position du portefeuille : 1 jour en trading, 1 mois en gestion.

Soit  $V_t^P$  la valeur en  $t$  du portefeuille et  $V_{t+h}^P$  la valeur à l'horizon  $h$ . La rentabilité du portefeuille  $R_{t|t+h}^P$  investi à la date  $t$  et détenu sur un horizon de durée  $h$  a pour expression  $\forall t \geq 1$  :

$$R_{t|t+h}^P = \frac{V_{t+h}^P}{V_t^P} - 1.$$

Supposons que  $R_{t|t+h}^P$  est issu d'une variable aléatoire notée  $R^P$ . La VaR( $h, \alpha$ ) est alors définie par :

$$\mathbb{P}[R^P \leq \text{VaR}(h, \alpha)] = \alpha$$

c'est-à-dire la probabilité que la rentabilité du portefeuille soit inférieure à la VaR sur un horizon  $h$  est égale à  $\alpha$ <sup>4</sup>.

Notons  $F$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $R^P$  des rentabilités du portefeuille de périodicité  $h$ . La Value-at-Risk de probabilité d'occurrence  $\alpha$  et d'horizon d'investissement  $h$  est alors le quantile défini par :

$$\text{VaR}(h, \alpha) = F^{-1}(\alpha) \tag{2.2}$$

Il nous reste alors à caractériser la forme de  $F$ . De nombreuses formulations sont possibles. Nous nous intéresserons seulement aux plus classiques malgré leurs limites.

La première solution consiste à estimer  $F$  par sa distribution empirique : nous obtenons la VaR historique. Nous estimons alors  $F$  non-paramétriquement par sa distribution empirique  $\hat{F}$ . Supposons que nous disposons d'un historique de  $T$  observations des rentabilités. La distribution empirique  $\hat{F}$  des rentabilités du portefeuille est alors caractérisée à partir du vecteur  $(\hat{R}_{1|1+h}^P, \dots, \hat{R}_{T|T+h}^P)'$  et  $\hat{F}^{-1}(\alpha)$  correspond au quantile de probabilité  $\alpha$  de  $(\hat{R}_{1|1+h}^P, \dots, \hat{R}_{T|T+h}^P)'$ .

L'avantage de cette méthode est donc de ne pas imposer d'hypothèse sur la loi de distribution des rentabilités. Mais le problème qui se pose est l'*over-fitting* ou encore la dépendance trop forte à l'échantillon sur lequel la VaR a été déterminée, et donc sa difficulté à être robuste dans le temps.

Pour résoudre cela, nous allons proposer une deuxième solution ajustant sur les rentabilités un modèle statistique : on parle alors de VaR paramétrique. De manière classique, le choix du modèle paramétrique se porte sur la loi Normale. Supposons donc que les rentabilités du portefeuille  $R_{t|t+h}^P$  sont issues d'une variable aléatoire gaussienne : ainsi,  $F$  est définie par  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\mu$  l'espérance des rentabilités et  $\sigma^2$  la variance des rentabilités.

Nous obtenons ainsi à partir de l'équation (2.2) :

$$\Phi\left(\frac{\text{VaR}(h, \alpha) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

avec  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite. Nous avons donc :

$$\text{VaR}(h, \alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Nous n'allons pas développer d'autres modélisations dans ce cours mais il nous paraît intéressant d'introduire les limites de la modélisation gaussienne. En effet, cette méthode repose sur des hypothèses irréalistes pour modéliser les rentabilités des actifs financiers puisque trois faits stylisés caractérisent leur distribution et ne sont pas captés par la modélisation gaussienne :

4. Les praticiens peuvent aussi définir le niveau de confiance par  $1 - \alpha$  qui correspond de même au quantile de probabilité  $\alpha$  : ainsi, une VaR à 99% par exemple correspond au quantile de probabilité  $\alpha = 1 - 99\% = 1\%$ .

1. l'asymétrie : l'occurrence de pertes extrêmes est plus forte que celle de profits extrêmes,
2. les queues épaisses,
3. le clustering : par exemple, les rentabilités élevées en valeur absolue sont suivies par des rentabilités élevées en valeur absolue.

Les deux premiers faits stylisés peuvent s'observer sur la Figure 2.5 à l'aide des QQ-plot et densité de la queue des pertes de l'indice de marché français CAC 40 relativement à la loi Normale. Le troisième est révélé par les grappes de volatilité de la Figure 2.2.

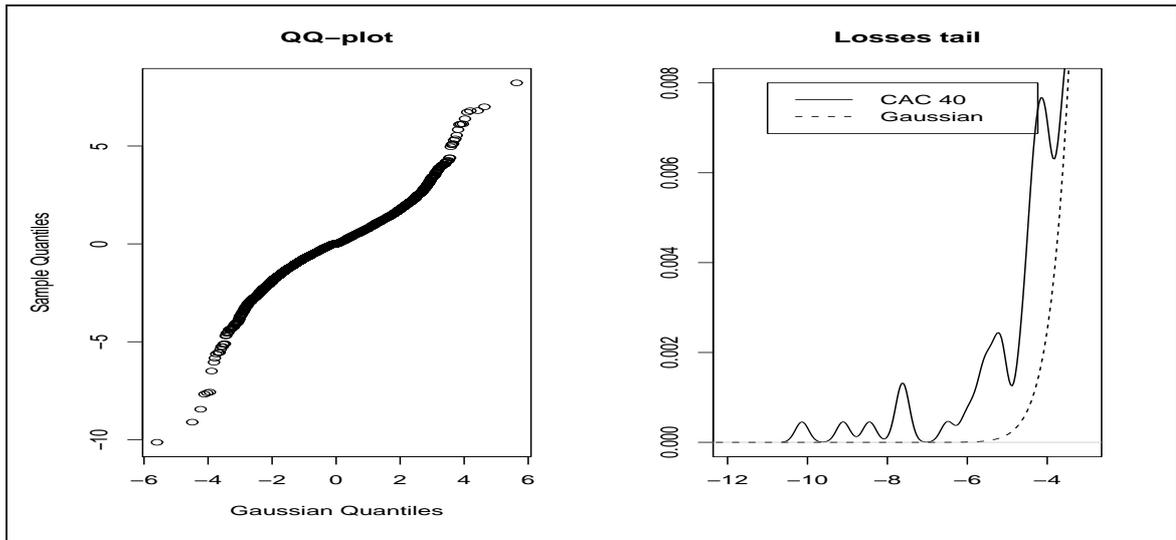


FIGURE 2.5 – QQ-plot et distribution de la queue des pertes du CAC 40 relativement à la loi Normale

Cette mesure du risque de marché ainsi que les modèles probabilistes conformes au profil de la distribution des rentabilités seront étudiés dans des cours plus approfondis en troisième année.

## 2.2 Mesurer la performance d'investissement

### 2.2.1 Une première mesure synthétique

Outre le risque essentiel à estimer et quantifier, il faut aussi, lorsque l'on réalise un investissement, mesurer sa performance : en fait ceci est ce qui intéresse en premier lieu tout investisseur. Nous étudierons plus bas la relation primordiale entre risque et performance qui stipule que plus l'investisseur prend de risque plus la rentabilité attendue doit être élevée (nous l'avons déjà énoncée dans la section 2.1.1). Mais comment mesurer cette performance ?

#### Performance d'un indice actions

Observons sur la Figure 2.6 l'évolution mensuelle de l'indice américain Standard & Poor's entre décembre 1927 et juillet 2007.

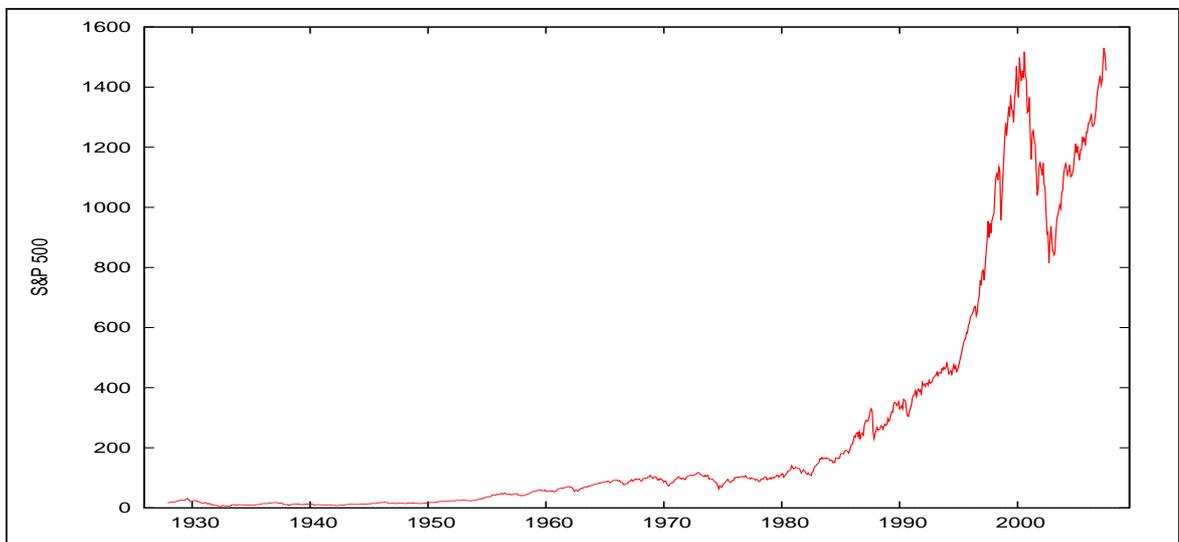


FIGURE 2.6 – Évolution de l'indice S&P 500

Fin décembre 1927, cet indice a une valeur de 17.66 et termine fin juillet 2007 à 1455.27, où il commence sa baisse avec la crise des subprimes. Si un investisseur avait placé 1 dollar dans cet indice en décembre 1927, il aurait accumulé jusqu'en juillet 2007  $1455.27/17.66 = 82.40$  dollars : il aurait donc multiplié sa richesse initiale par 82.40. Nous pouvons considérer un autre chiffre plus utilisé décrivant non plus la multiplication du capital initial mais la richesse relative ajoutée à la richesse initiale (et non pas la seule différence de richesse, mesure absolue, qui sera d'autant plus importante que la richesse initiale est élevée). Ici ce chiffre serait égal à  $(82.40 - 1)/1 = 8140\%$ . Il correspond en fait à la rentabilité de l'investissement de 1 dollar en décembre 1927. Nous pouvons donc conclure à nouveau à l'aide de ce chiffre à une performance importante de l'investissement.

Formellement, si nous notons  $W_0$  la richesse initiale et  $W_T$  la richesse finale, la rentabilité  $R$  est égale à :

$$R = \frac{W_T - W_0}{W_0} = \frac{W_T}{W_0} - 1$$

Cette expression est appelée rentabilité arithmétique. Lorsque la rentabilité arithmétique est faible et proche de 0 (ceci est le cas lorsque les données sont de périodicité courte, comme des données quotidiennes), ce qui revient à ce que le quotient  $\frac{W_T}{W_0}$  soit proche de 1, nous pouvons utiliser la rentabilité logarithmique, appelée

aussi log-rentabilité ou encore rentabilité géométrique. En effet, nous avons à partir d'un développement limité à l'ordre 1 l'approximation suivante :

$$\ln \frac{W_T}{W_0} \approx \frac{W_T}{W_0} - 1 = R \quad \text{pour } \frac{W_T}{W_0} \rightarrow 1$$

Néanmoins, l'inconvénient des log-rentabilités est le fait que la log-rentabilité d'un portefeuille n'est pas égale à la somme des log-rentabilités des actifs le composant, contrairement à la rentabilité arithmétique.

Enfin, nous avons réduit le taux de rentabilité d'un titre au taux de gain en capital. Or il faudrait y ajouter le taux de rémunération du titre défini par le *dividend yield*, rapport dividendes sur prix, ce qui donne l'expression réelle de la rentabilité  $R'$  suivante :

$$R' = \frac{W_T - W_0 + D}{W_0} = R + \frac{D}{W_0}$$

avec  $D$  les dividendes sur la période d'investissement.

Or le *dividend yield* peut être considéré comme négligeable par rapport au taux de gain en capital pour des périodicités courtes ; c'est pour cela que l'on réduit souvent la rentabilité à ce seul taux.

### Justification statistique de l'utilisation de la rentabilité

La justification de l'utilisation de la rentabilité peut se faire aussi de manière statistique. En effet, étudions la série temporelle de l'indice S&P 500. Nous y appliquons au préalable la transformation de Box-Cox et plus particulièrement celle du logarithme, dans le but de *stabiliser* la variance des données. Nous pouvons conclure tout de même à la non-stationnarité de l'indice américain. En effet :

1. la Figure 2.7 révèle une tendance globale à la hausse,
2. elle révèle aussi la décroissance lente des autocorrélations significativement non nulles de la série temporelle des valeurs du S&P 500,
3. et enfin le test statistique de Dickey-Fuller augmenté conclue à la présence d'une racine unitaire dans le processus de l'indice et donc à sa non-stationnarité. En effet, pour n'importe quel ordre de retard et pour les trois différents modèles (cf. Lardic et Mignon [16] pour plus de précisions), nous avons des p-value de test très supérieures à 0.9 : on accepte donc l'hypothèse nulle de présence de racine unitaire équivalent à la non-stationnarité du processus.

Il nous faut donc stationnariser les données en les différenciant une fois. Ces nouvelles données se révèlent alors stationnaires :

1. pas de tendance dans la série temporelle des différences premières des logarithmes du S&P 500 (cf. Figure 2.8),
2. l'autocorrélogramme de la Figure 2.8 ne révèle pas de décroissance lente des autocorrélations,
3. et le test de Dickey-Fuller augmenté ne révèle pas la présence d'une racine unitaire.

Les différences premières de la série des logarithmes du S&P 500 sont équivalentes aux log-rentabilités. Nous comprenons alors pourquoi les rentabilités seront des objets adéquats à la modélisation statistique, puisqu'elles se révèlent être stationnaires *en moyenne*.

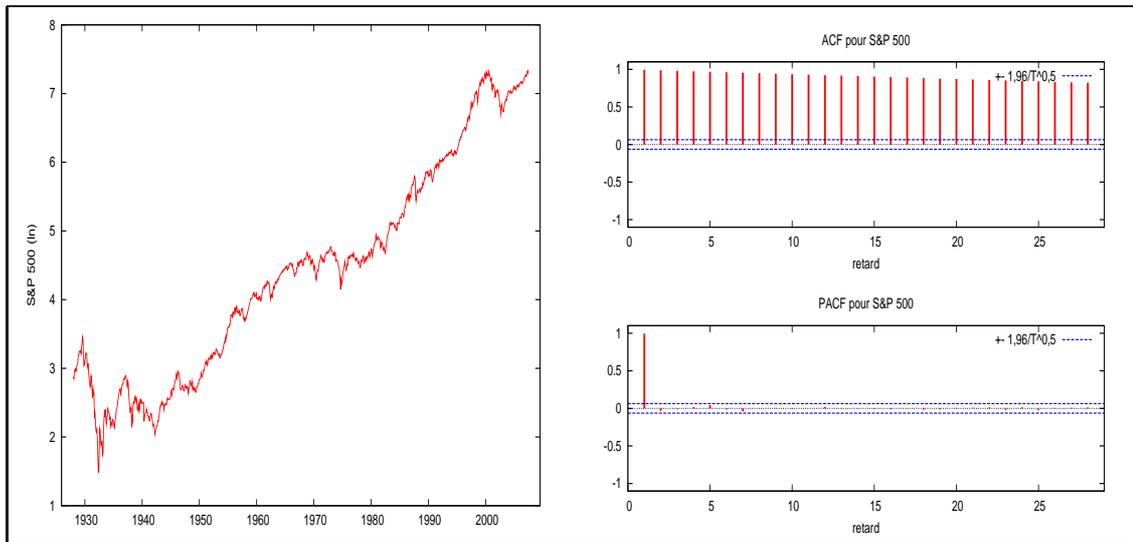


FIGURE 2.7 – Évolution de l'indice S&amp;P 500 en log et autocorrélogrammes

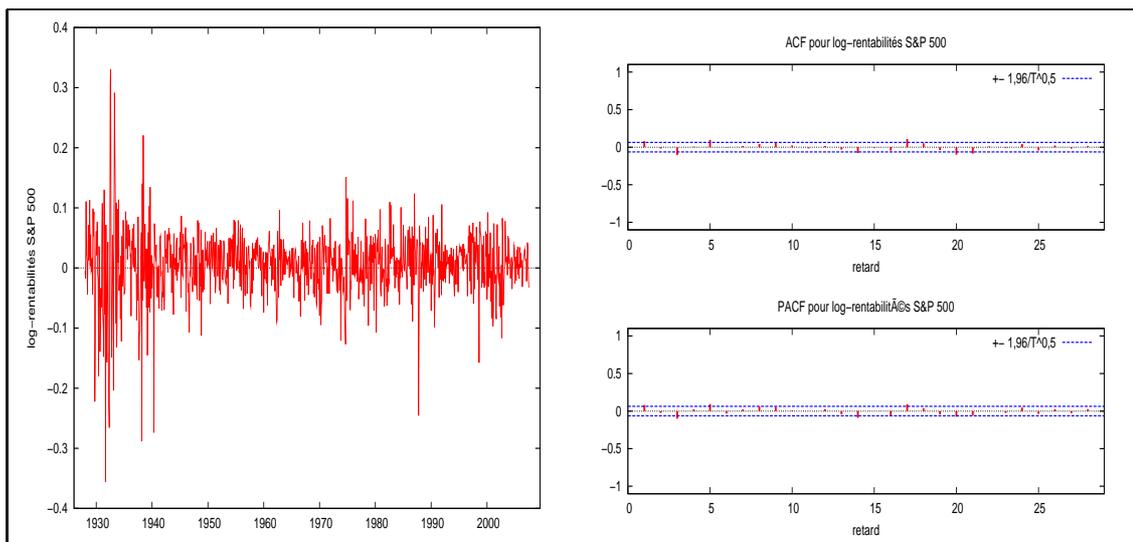


FIGURE 2.8 – Évolution des différences premières l'indice S&amp;P 500 en log et autocorrélogrammes

### Rentabilité d'un instrument de taux

Dans le cas des instruments de taux, les données que nous observons sur les marchés sont différentes de celles d'actions, d'indices ou de portefeuilles : les données sont les taux annuels quelle que soit la périodicité. Pour calculer la rentabilité d'un investissement sur ce type de produit, il faut *désannualiser* le taux de la manière suivante, en supposant que le taux annuel est la capitalisation de taux similaires de périodicité plus faible :

$$(1 + r_{t+\Delta})^{\frac{1}{\Delta}} = 1 + r_{t+1 \text{ an}} \Leftrightarrow r_{t+\Delta} = (1 + r_{t+1 \text{ an}})^{\Delta} - 1$$

avec  $r_{t+\Delta}$  le taux *désannualisé*,  $\Delta$  le pas de la périodicité (cf. tableau 2.2) et  $r_{t+1 \text{ an}}$  le taux annualisé défini sur les marchés financiers.

### 2.2.2 Mesures de rentabilité ajustée du risque

La rentabilité est donc une très bonne mesure de la performance. Mais seule elle n'est pas suffisante pour juger de la bonne ou mauvaise performance d'un investissement.

Supposons deux investissements A et B ayant au même horizon d'un an une rentabilité semblable. Néanmoins, le risque pris par l'investisseur pour l'investissement A est relativement faible (volatilité ou VaR faible) alors que celui pris par l'investisseur B est beaucoup plus élevé. Ce dernier ne va donc pas être satisfait de la performance de son investissement puisqu'il aurait pu prendre moins de risque pour le même gain avec l'investissement A.

Une judicieuse mesure de la performance doit donc prendre en compte le risque rémunéré par la rentabilité de l'investissement. C'est ainsi que nous allons utiliser des mesures de la rentabilité ajustée du risque.

Nous avons plusieurs possibilités suivant que l'investisseur mesure sa performance de manière absolue ou relative à un benchmark.

#### Mesure absolue

Ces mesures évaluent la performance sans référence à un benchmark. Nous présentons deux ratios :

1. Le ratio de Sharpe  $S_i$  pour un portefeuille  $i$ , défini par Sharpe en 1966, mesure la rémunération par l'investissement, en excès du taux sans risque  $r_f$ , d'une unité de risque, mesuré par la volatilité :

$$S_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{\sigma(R_i)}. \text{ Une alternative au ratio de Sharpe peut être proposée avec le risque non plus}$$

$$\text{mesuré par la volatilité mais la VaR (en rentabilité) : } S'_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{|\text{VaR}_i|}.$$

2. Le ratio de Treynor mesure le rapport entre l'excès de rentabilité de l'investissement et son risque systématique déterminé par le  $\beta$  issu du CAPM :  $T_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{\beta_i}$ .

#### Mesure relative

Ces mesures évaluent la performance en référence à celle d'un benchmark. Nous proposons dans ce cours deux ratios :

1. L'alpha de Jensen  $\alpha_i$  pour un portefeuille  $i$ , défini par Jensen en 1968, est égal à la constante du modèle de marché :  $\alpha_i = [\mathbb{E}(R_i) - r_f] - [\beta_i(\mathbb{E}(R_B) - r_f)]$ . Cet indicateur mesure donc la part de la rentabilité non prévue par le CAPM et que l'on peut accrédi-ter à l'investisseur gérant son capital, qui, si  $\alpha_i > 0$ , a pu *battre* son benchmark de rentabilité  $R_B$ . Le ratio de Black-Treynor  $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$  permet de comparer des investissements de benchmarks différents.
2. Le ratio d'information s'apparente à un ratio de Sharpe sur les rentabilité et risque résiduels en excès du benchmark :  $IR_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - \mathbb{E}(R_B)}{\sigma(R_i - R_B)}$ . Le dénominateur est appelé *tracking-error volatility* et par abus de langage *tracking-error* ou TE : une valeur faible de la *tracking-error* signifie que le risque de l'investissement est proche de celui de son benchmark. L'objectif pour un gérant benchmarké est bien entendu d'avoir un  $IR$  élevé, ce qui signifie prendre des risques similaires au benchmark tout en ayant une rentabilité plus élevée. Tout le problème est de savoir si le benchmark est efficient : dans le cas contraire, le battre serait relativement aisé !

Ces différents ratios peuvent avoir des insuffisances comme le fait d'être dépendants pour certains du CAPM dont nous avons vu les limites plus haut. Néanmoins, ils restent très utilisés par les gérants pour déterminer la performance de leurs investissements.

## 2.3 Allocation et stratégies d'investissement

### 2.3.1 Allocation efficiente de Markowitz

Bernstein [5] affirme que "l'intuition la plus célèbre de l'histoire moderne de la finance et de l'investissement se trouve dans un court article intitulé *Portfolio Selection*". Cet article [18] est écrit par Markowitz en 1952. Il pose les bases de la Théorie Moderne du Portefeuille (cf. Aftalion, Poncet et Portait [1], Viviani [24], et Fabozzi, Focardi et Kolm [8] pour une revue de la TMP).

Nous allons dans cette section étudier de manière assez quantitative mais claire, en donnant à chaque fois toutes les étapes des démonstrations mathématiques, la construction de portefeuilles suivant les préceptes de Markowitz. Avant d'entrer dans le calcul à proprement dit de l'allocation optimale, nous allons introduire les principes essentiels d'aversion au risque et de diversification.

#### Critères de rentabilité et de risque pour la sélection d'un portefeuille

La théorie de Markowitz est une théorie *normative*, c'est-à-dire qu'elle décrit le comportement que devrait suivre sous certaines hypothèses un investisseur rationnel pour construire un portefeuille dans un univers incertain. Il conclut qu'un investisseur optimise le couple rentabilité-risque de son portefeuille.

Pourtant, la première intuition est de choisir un portefeuille d'actifs qui a l'espérance de rentabilité la plus élevée : ce principe est appelé le critère de Pascal. Une telle hypothèse est en réalité trop simpliste car le risque de perte d'un portefeuille est primordial dans le choix de l'investisseur. Ceci a déjà été introduit dans la section 2.2.2 sur les mesures de performance.

Mais nous pouvons l'illustrer aussi par le célèbre paradoxe de Saint-Pétersbourg imaginé par Bernoulli au 18<sup>ème</sup> siècle. Une pièce non truquée est lancée autant de fois  $i$  qu'il est nécessaire pour que le côté face apparaisse. Lorsque le côté face sort, le jeu s'arrête et le joueur reçoit  $2^i$  euros. Quelle est la mise initiale pour que le jeu soit équitable ? Si nous calculons ce droit d'entrée sur la seule espérance  $\mathbb{E}$  de gain du jeu, alors la participation devient prohibitive puisqu'elle est infinie.

En effet, le jeu est composé d'un nombre infini dénombrable de gains  $x = [2, 2^2, \dots, 2^i, \dots]$  qui ont les probabilités d'occurrence correspondantes  $\pi = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^i}, \dots \right]$ . Selon le critère de Pascal, le coût d'entrée serait égal à l'espérance de gain du jeu :

$$\mathbb{E} = \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} 2^i = \sum_{i=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Personne n'accepterait de donner cette somme infinie ! Or, le droit d'entrée la plupart du temps proposé à ce jeu est une petite somme. Cela signifie que d'autres facteurs, autre que l'espérance de rentabilité, interviennent dans la décision du joueur.

Nous avons recours alors à la notion de fonction d'utilité, intégrant la décroissance de l'utilité marginale (fonction d'utilité concave) : 1000 euros de plus lorsque l'on possède déjà 1000 euros n'est pas 2 fois plus *utile* au joueur et donc il ne sera pas prêt à sacrifier en droit d'entrée la même somme plus le jeu progressera. L'*aversion au risque* est une notion essentielle pour comprendre la décision du joueur.

Ainsi, il en est de même pour un investisseur qui sélectionnera le portefeuille qui lui procurera l'espérance d'utilité la plus élevée. Cette espérance d'utilité sera une fonction de l'espérance de rentabilité et du risque induit par le portefeuille.

#### Principe de la diversification

Le principe de la diversification dans la sélection d'un portefeuille relève du vieil adage : "Ne jamais mettre tous ses oeufs dans le même panier". Un exemple simple mais réducteur des bienfaits de la diversification peut être donné lorsque nous calculons la variance d'un portefeuille composé d'actifs indépendants. Soit  $R_P$  la rentabilité d'un portefeuille équi-pondéré composé de  $N$  actifs risqués de rentabilité  $R_i$  non corrélés.

Nous avons  $R_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i$ . La variance  $\mathbb{V}(R_P)$  du portefeuille, que nous utiliserons comme mesure du risque<sup>5</sup>, a pour expression d'après le Théorème Central Limite :

$$\mathbb{V}(R_P) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \mathbb{V}(R_i) = \frac{1}{N^2} N \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow +\infty.$$

Plus le nombre d'actifs croît, plus la variance du portefeuille diminue. Le risque décroît avec la diversification. Néanmoins, détenir un nombre infini d'actifs non corrélés est irréaliste.

Mais étant donné que leur corrélation n'est souvent pas parfaite (c'est-à-dire égale à 1), il est possible de diminuer son risque en diversifiant son investissement. En effet, soient  $X$  et  $Y$  2 variables aléatoires dont le coefficient de corrélation linéaire est  $\rho$  ( $-1 \leq \rho \leq 1$ ). Si nous mesurons le risque par la volatilité, nous avons :

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = (\sigma_X + \sigma_Y)^2 + 2(\rho - 1)\sigma_X\sigma_Y$$

Ainsi,  $\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y$ . Si les actifs varient très différemment suivant les évolutions des marchés, il est possible de construire un portefeuille de risque plus faible que la somme des risques des actifs le composant.

Nous allons voir dans la suite comment déterminer le portefeuille optimal avec un nombre fini  $N$  d'actifs à partir de l'espérance de rentabilité et du risque (critère *moyenne-variance*).

### Construction d'un portefeuille optimal

Dans la multiplicité de choix proposés à l'investisseur en termes de rentabilité et variance de portefeuille, Markowitz introduit la notion de portefeuille *efficient*. "Qui ne risque rien n'a rien" : pour obtenir une espérance de rentabilité plus élevée, il faut accepter un risque plus important. Le risque est l'effort nécessaire à l'obtention d'une rentabilité. Un portefeuille *efficient* est celui qui offre la rentabilité attendue la plus forte pour un niveau de risque donné, ou qui a le risque le plus faible pour une rentabilité attendue donnée. L'ensemble des portefeuilles efficients de l'univers d'actifs considéré forme la *Frontière Efficiente*.

Il est possible de construire la frontière efficiente des actifs risqués à l'aide d'une formulation très utilisée en pratique. Nous allons tenter de maximiser l'utilité d'un investisseur rationnel qui sera caractérisé par un paramètre d'aversion au risque  $\gamma > 0$ .

Le portefeuille ainsi obtenu est le portefeuille *optimal* qui maximise l'espérance de l'utilité de l'investisseur  $\mathbb{E}[U(W)]$  avec  $W$  la richesse de l'investisseur. Dans le cadre théorique de Markowitz, il est utilisé une fonction d'utilité quadratique. Maximiser cette fonction objectif est équivalent à maximiser, par rapport à  $\omega$ , la fonction d'optimisation de moyenne-variance :

$$\max_{\omega} \mathbb{E}[U(W)] \Leftrightarrow \max_{\omega} \left( \omega' \mu - \frac{\gamma}{2} \omega' \Sigma \omega \right)$$

avec  $\omega$  le vecteur de poids des actifs composant le portefeuille,  $\mu$  le vecteur des espérances de rentabilités des actifs en excès du taux sans risque,  $\Sigma$  la matrice de variance-covariance des actifs, symétrique et définie positive<sup>6</sup>, et  $e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]'$ .

Nous remarquons que plus l'individu est averse au risque ( $\gamma$  croît), plus le risque du portefeuille optimal pénalise son espérance de rentabilité : le portefeuille maximisé est donc moins risqué. La maximisation sans contraintes de cette fonction a pour solution les poids optimaux  $\omega^*$  :

$$\omega^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu$$

5. Nous avons vu précédemment que la variance n'était pas une bonne mesure des risques extrêmes. Le développement de sélection de portefeuille à partir de la VaR est envisageable mais n'est pas l'objet de cette section.

6.  $\Sigma$  est définie positive signifie que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x' \Sigma x \geq 0$  et  $x' \Sigma x = 0 \Rightarrow x = 0$ . Comme elle est en outre symétrique, nous pouvons réduire cette définition au fait que toutes ses valeurs propres doivent être strictement positives.

Ces derniers sont déterminés à l'aide de la résolution de l'optimisation d'une fonction quadratique qui annule la dérivée première en  $\omega$  et a une dérivée seconde négative, ce qui implique sa maximisation.

Un portefeuille très utilisé est celui appelé le portefeuille tangent ou de marché (nous étudierons en détail ce portefeuille en troisième année) : il est déterminé pour une aversion au risque :  $\gamma = e' \Sigma^{-1} \mu$ .

Des contraintes peuvent être ajoutées et les poids optimaux obtenus à l'aide de méthodes de maximisation numériques de l'utilité. Ceci est le cas lorsque l'investisseur ne peut vendre à découvert, les poids ne peuvent alors pas être négatifs, et lorsque l'effet de levier n'est pas possible, c'est-à-dire que l'investissement est auto-financé et le poids dans l'actif sans risque ne doit donc pas être négatif (pas d'emprunt).

### Limites de l'optimisation de Markowitz

Nous allons présenter 4 limites à l'optimisation de portefeuille suivant Markowitz qui nous semblent essentielles :

1. La première concerne la modélisation statistique sous-jacente à l'optimisation moyenne-variance : effectivement, réduire les actifs à leur moments d'ordre 1 (moyenne) et 2 (variance) revient à modéliser les actifs du portefeuille optimal par une loi gaussienne. Or certains actifs ne sont pas gaussiens et peuvent avoir des profils de distribution très différents : l'optimisation de Markowitz fournira alors des résultats peu cohérents avec la réalité. Nous pensons aux actions risquées mais aussi aux titres de créances qui devraient être modélisés plus précisément.
2. La deuxième est la dépendance de l'optimisation de Markowitz à l'estimation des rendements moyens. Ces rendements estimés pour une période d'allocation peuvent évoluer à court-terme : or un changement très faible de la moyenne des rendements aura des conséquences démesurément importantes sur l'allocation, ce qui semble ennuyeux dans la pratique. L'optimisation est donc relativement instable.
3. La troisième survient lorsque le nombre d'actifs à profils similaires est très importants. Alors la caractéristique définie positive de la matrice de variance-covariance peut être mise à mal. Des méthodes d'extraction de facteurs communs (ACP) ou de shrinkage peuvent alors déterminer une matrice de variance-covariance plus facile à utiliser.
4. La dernière limite est opérationnelle : en effet, les optimisations étudiées précédemment donnent des solutions simples mais dans la réalité les contraintes sur les poids sont plus nombreuses et rendent l'optimisation difficile. En effet, régulièrement, un investisseur peut vouloir mettre des limites d'achat ou de vente sur certaines classes d'actifs (on peut penser par exemple aux actions des pays émergents qui sont plus risquées et dont on peut vouloir limiter l'allocation). Les contraintes vont alors influencer fortement les allocations qui ne seront alors plus si optimales que prévues...

Les améliorations à ces différentes limites seront étudiées en troisième année.

### 2.3.2 Stratégies de couverture du risque en delta statique

Ce que regroupe le terme stratégies d'investissement est vaste. Il peut embrasser deux types d'objectif : la couverture du risque et la création de performance.

Ici, nous ne développerons qu'une stratégie particulière de couverture du risque qui est celle de la couverture du risque en delta statique. Bien entendu d'autres stratégies de ce type existent. Nous les étudierons en troisième année, ainsi que les stratégies de création de performance. Mais il est important de comprendre qu'en premier lieu, gérer la performance de l'investissement c'est gérer le risque de perte de cet investissement. L'objectif de cette section est donc de proposer une stratégie immunisant le portefeuille d'investissement des pertes potentielles.

Pour couvrir ainsi le risque de marché d'un portefeuille, une solution classique est d'utiliser un call sur ce portefeuille.

En effet, la valeur d'un portefeuille  $V_t$  composé d'un call et de son sous-jacent est en 0  $V_0 = \alpha C_0 + \beta S_0$ . Ce portefeuille est insensible au cours du sous-jacent si le portefeuille a une variabilité par rapport au sous-jacent nulle, c'est-à-dire si  $\frac{\partial V_0}{\partial S} = \alpha \frac{\partial C_0}{\partial S} + \beta = 0$ . Or l'indicateur Delta du call en 0 est  $\Delta_0 = \frac{\partial C_0}{\partial S} = \Phi(d_1)$  et donc nous obtenons :  $\beta = -\alpha \Phi(d_1)$ . Le portefeuille de couverture est donc composé de l'achat d'un call par exemple et de la vente de  $\Phi(d_1)$  sous-jacent.

Si nous fixons ce Delta pour toute la période d'immunisation (la proportion de sous-jacents est donc fixée à  $\Delta_0$ ), nous produisons une couverture statique non optimale car le Delta a besoin d'être ajusté au cours du temps et de l'évolution du sous-jacent. Cette couverture non dynamique peut être améliorée à l'aide d'une couverture dynamique qui dépasse le cadre de ce cours.

# CONCLUSION

Ce cours a tenté de fournir les outils nécessaires à une bonne compréhension des enjeux relatifs aux marchés financiers. L'objectif était d'une part de donner une culture générale sur l'évolution des marchés, les institutions financières et les instruments principaux échangés ; et d'autre part de proposer une introduction indispensable pour la troisième année de l'Ensa spécialisation Gestion des Risques et Ingénierie Financière, en décrivant les tenants et les aboutissants de la finance de marché moderne, et en se concentrant sur la gestion des risques financiers (de marché dans ce cours) et la gestion de la performance d'investissement.

Être ingénieur financier demande une grande rigueur de modélisation statistique, étant donné que les enjeux financiers sont colossaux - nous pensons à la gestion des risques, appelée à de futurs développements après la crise des subprimes - et demande aussi une importante imagination pour créer de la performance sur les marchés, étant donnée la difficulté croissante de cette activité avec l'apparition des nouvelles technologies de l'information et la multiplication des agents sur les marchés : la concurrence crée plus d'efficience et diminue les possibilités d'arbitrage. Néanmoins, les marchés conserveront toujours plus ou moins les caractéristiques du concours de beauté décrit par Keynes. Les intervenants restent des hommes et des femmes, dont les comportements inefficients par essence ne sont pas à négliger.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] AFTALION, F., PONCET, P. & PORTAIT, R., 1998, *La Théorie Moderne du Portefeuille*, Que sais-je ?, PUF.
- [2] AGLIETTA, M. & REBERIOUX, A., 2004, *Dérives du Capitalisme Financier*, Albin Michel.
- [3] BECK, U., 1986, *La société du Risque : Sur la Voie d'une Autre Modernité*, Flammarion, Paris.
- [4] BERLE, A. & MEANS, G., 1932, *The Modern Corporation and Private Property*, Harcourt, Brace and World, New York.
- [5] BERNSTEIN, P., 1995, *Des Idées Capitales*, PUF, Quadrige.
- [6] CARHART, M., 1997, *On Persistence in Mutual Fund Performance*, *Journal of Finance*, 52, 57-82.
- [7] DANA, R. & JEANBLANC-PICQUE, M., 1998, *Marchés Financiers en Temps Continu - Valorisation et Equilibre*, *Economica*.
- [8] FABOZZI, F., FOCARDI, S. & KOLM, P., 2006, *Financial Modelling of the Equity Market*, Wiley Finance.
- [9] FAMA, E.F., 1998, *Market Efficiency, Long-Term Returns, and Behavioral Finance*, *Journal of Financial Economics*, 49, 283-306.
- [10] FAMA, E. & FRENCH, K., 1993, *Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds*, *Journal of Financial Economics*, 33, 3-56.
- [11] GIDDENS, A., 1991, *Les Conséquences de la Modernité*, L'Harmattan.
- [12] GURLEY, J.G. & SHAW, E.S., 1960, *Money in a Theory of Finance*, The Brookings Institution, Washington.
- [13] HICKS, J., 1975, *Crisis in Keynesian Economics*, Basil Blackwell.
- [14] JEGADEESH, N. & TITMAN, S., 1993, *Returns to Buying Winners and Selling Losers : Implications for Stock Market Efficiency*, *Journal of Finance*, 48, 65-91.
- [15] LAMBERTON, D. & LAPEYRE, B., 1991, *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, *Mathématiques et Applications*, Ellipses.
- [16] LARDIC, S. & MIGNON, V., 2002, *Econométrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières*, *Economica*.
- [17] LINTNER, J., 1965, *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
- [18] MARKOWITZ, H., 1952, *Portfolio Selection*, *Journal of Finance*, 7, 77-99.
- [19] MERTON, R.C., 1972, *An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7, 1851-1872.
- [20] MOSSIN, J., 1966, *Equilibrium in a Capital Asset Market*, *Econometrica*, 34, 768-783.
- [21] MUSIELA, M. & RUTKOWSKI, M., 1997, *Martingale Methods in Financial Modelling*, *Applications of Mathematics*, Springer.
- [22] PERETTI-WATEL, P., 2000, *Sociologie du Risque*, HER/Armand Colin, Paris.

- [23] SHARPE, W., 1964, *Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, Journal of Finance, 19, 425-442.
- [24] VIVIANI, J.L., 2001, *Gestion de Portefeuille*, Dunod.