

THEORIE DE LA DECISION FINANCIERE
Cours du Professeur Jean-Pierre Laffargue

Magistère d'Economie, deuxième année
Année universitaire 2004-2005

PARTIE I : DECISION D'INVESTISSEMENT, STRUCTURE DES TAUX, EVALUATION DE TITRES

Exercice 1 : Détermination du taux d'intérêt dans une économie d'échange.

Considérons une économie à un seul bien où coexistent deux types de consommateurs A et B vivant sur deux périodes uniquement. Les revenus $\tilde{R}_{i,t}$, exprimés en unités de biens, perçus à la date t_i ($i = 1,2$) par l'individu de type X ($X = A,B$) sont égaux à :

$$R_{A,1} = 200 \quad \text{et} \quad R_{A,2} = 210$$

$$R_{B,1} = 20 \quad \text{et} \quad R_{B,2} = 105$$

L'économie comprend 500 consommateurs de type A et 1 000 de type B. Notons $C_{1,X}$ et $C_{2,X}$ la consommation d'un agent de type X ($X = A,B$) respectivement en t_1 et t_2 . Chaque consommateur, quel que soit son type X , a des préférences représentables par la même fonction d'utilité intertemporelle :

$$U(C_{1,X};C_{2,X}) = 20 \cdot \sqrt{C_{1,X}} + C_{2,X}$$

Le prix initial du bien est normalisé à 1 ; les consommateurs prévoient qu'ils va s'accroître de 5% entre t_1 et t_2 .

- 1° Déterminez les consommations optimales de chaque agent pour les périodes 1 et 2.
- 2° Calculez le taux d'intérêt réel et le taux nominal d'équilibre de cette économie.
- 3° Représentez graphiquement cet équilibre.

Exercice 2 : Equilibre Consommation-Production

Considérons une économie à un seul bien et à deux dates, t_1 et t_2 . Soit un consommateur, M. Janvier, dont la fonction d'utilité est : $U(C_1, C_2) = C_1^{1/2} C_2^{1/2,75}$ avec C_i sa consommation à la date t_i ($i = 1,2$). Ce consommateur perçoit une dotation exogène unique $R_1 = 290$ en t_1 .

En t_1 , il a la possibilité de réaliser un investissement réel pour un montant K_1 . Il percevra alors avec certitude en t_2 la somme $K_2 = 44K_1^{1/2}$.

- 1° Supposons dans un premier temps qu'il n'existe pas de marché financier.

a) Déterminez le niveau optimal de C_1 , C_2 et K_1 de M. Janvier. Quel est son niveau d'utilité ? Faites une représentation graphique.

b) Quel est son taux de préférence pour le présent ? Quel est le taux marginal du capital ?

2° Supposons maintenant qu'un marché financier existe. M. Janvier a ainsi la possibilité de prêter ou d'emprunter en t_1 au taux $r = 10\%$.

a) Déterminez son nouvel équilibre C_1 , C_2 et K_1 . Précisez le montant qu'il emprunte (ou qu'il prête). Quel est son nouveau niveau d'utilité ? Faites une représentation graphique.

b) Montrez que la politique d'investissement est indépendante des préférences et du revenu de M. Janvier ; montrez que le critère d'investissement consiste à choisir les projets dont la VAN est positive.

c) Supposons que M. Janvier décide de créer une entreprise afin de réaliser ses investissements réels. Le passif de l'entreprise est constitué des actions détenues par M. Janvier (son apport personnel est égal à sa dotation initiale $R_1 = 290$) et d'une dette de nominal D_1 . M. Janvier confie la gestion de l'entreprise à un gérant dont on néglige la rémunération. Montrez que si l'objectif du gérant est de maximiser la valeur des actions de l'entreprise, alors il investira dans les projets dont la VAN est positive.

Exercice 3 : Choix d'investissement en environnement certain

Votre banque vous propose une formule d'épargne-logement ayant les caractéristiques suivantes : vous placez 10 000 euros la première année, puis la banque vous verse 23 000 euros la deuxième année, puis vous remboursez la troisième année la somme de 13 200 euros.

1° Donnez la formule permettant de définir le taux de rendement interne de cette opération (T.R.I.).

2° Montrez que cette équation admet deux solutions. Interprétez.

Exercice 4 : Choix d'investissement en environnement certain

La *Virginia Compagny* étudie le remplacement d'une machine à riveter par un nouvel engin ayant pour caractéristique d'accroître le résultat brut (avant dépréciation et impôt) de 31 000 euros par an (passant de 20 000 euros à 51 000 euros). La nouvelle machine coûterait 100 000 euros avec une durée de vie estimée à 8 ans. Le taux d'imposition sur les sociétés est de 40 % et le coût d'opportunité du capital est de 12 %. L'amortissement est supposé linéaire.

1° Supposons que la nouvelle machine aura une valeur résiduelle nulle dans 8 ans ; que l'ancienne machine puisse encore servir 8 années avec un rendement annuel de 20 000 euros mais qu'elle est entièrement amortie et qu'elle a une valeur de revente désormais nulle. Doit-on la remplacer ?

2° Supposons maintenant que la machine en place a une valeur de revente actuelle de 15 000 euros, une valeur comptable nette des amortissements de 40 000 euros et une durée de vie de 8 ans aux termes desquels sa valeur de revente sera nulle. La nouvelle machine pourra, en revanche, être revendue 12 000 euros au bout des huit années. Doit-on remplacer l'ancienne machine ?

Exercice 5 : Choix d'investissement en environnement certain

Le trésorier de la *United Southern Capital Corporation* a soumis à la direction de l'entreprise un projet censé accroître de 55 % le résultat net après impôt de la firme. Son coût serait de 900 euros et permettrait d'économiser 290 euros par an en dépenses de salaires, assurant ainsi à l'entreprise de « rentrer dans ses fonds » en 3,1 années, bien que l'équipement ait une espérance de vie de cinq ans (sans valeur de revente). La firme utilise une méthode d'amortissement fiscal linéaire et son bénéfice (avant impôt) est imposé à 50 %. Le coût d'opportunité du capital de cette entreprise est de 10 %. La direction va-t-elle accepter le projet ?

Les revenus attendus avant et après l'acceptation éventuelle du projet sont respectivement donnés par les tableaux 1 et 2 suivants :

Tableau 1 : Revenus attendus avant projet (en euros courants)

Année (pour $i \in [1, \dots, 5]$)	i
<u>Revenu</u>	1 000
Coût variable	- 500
Dépréciation	- 300
<u>Revenu Net</u>	200
Intérêt versé	0
<u>Bénéfice avant Impôt</u>	200

Impôt	- 100
<u>Bénéfice Net</u>	100

Tableau 2 : Revenus attendus après projet (en euros courants) à compléter

Année (pour $i \in [1, \dots, 5]$)	i
<u>Revenu</u>	1 000
Coût variable	–
Dépréciation	–
<u>Revenu Net</u>	310

Intérêt versé	0
<u>Bénéfice avant Impôt</u>	310
Impôt	–

<u>Bénéfice Net</u>	155
---------------------	-----

Exercice 6 : Choix d'investissement en environnement certain

La *Johnson Company* étudie les quatre projets mutuellement exclusifs suivants :

	Projet 1	Projet 2	Projet 3	Projet 4
Investissement (en euros)	48 000	60 000	60 000	36 000
Revenus annuels (en euros)	20 000	12 000	16 000	10 000
Durée du Projet (en euros)	5	15	10	15

Le coût d'opportunité du capital utilisé par cette compagnie est de 16 %.

1° Classez les projets uniques et exclusifs en fonction de leur valeur actualisée nette, puis en supposant qu'ils puissent être répétés un nombre infini de fois.

2° Supposons maintenant que la différence entre l'échelle (*i.e.* la valeur actualisée des investissements) des différents projets puisse être placée au taux d'intérêt obtenu par l'entreprise. Quel sera le classement définitif ?

Exercice 7 : Choix d'une politique de remplacement

1° Considérons un projet quelconque de durée de vie n années. On appelle flux monétaire annuel équivalent (FMAE) le flux constant dont la somme actualisée sur la durée de vie du projet est

égale à la VAN. On a donc : $\sum_{t=1}^n \frac{FMAE}{(1+i)^t} = VAN$.

Le FMAE permet de comparer des projets de durée de vie différente, le critère étant de retenir le projet dont le FMAE est le plus élevé.

Montrez l'égalité suivante : $FMAE = \frac{VAN}{\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]} \times i$.

2° Considérons maintenant l'entreprise Excalibur. Son activité industrielle nécessite une machine dont le coût d'acquisition, supposé constant dans le temps, est égal à 15000 euros et dont la durée de vie est 6 ans.

L'entreprise se demande à quel rythme il est optimal de remplacer la machine, sachant que d'une part plus elle est vieille, plus elle coûte cher en entretien et que d'autre part son prix de revente sur le marché de l'occasion décroît avec son âge.

On néglige les considérations d'amortissement et d'impôt sur les sociétés.

On suppose que le profit généré par l'entreprise est constant d'années en années, à la charge d'entretien de la machine près. Le taux d'actualisation est égal à 10%.

Le tableau suivant présente la variation de cette charge en fonction du temps :

<i>Année</i>	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
<i>Charge d'entretien (en euros)</i>	4000	4000	5000	6000	8000	10000

L'évolution dans le temps du prix de revente de la machine est la suivante :

<i>Année</i>	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
<i>Prix de revente (en euros)</i>	10000	6000	3000	1000	0	0

a) Quel est le coût total actualisé de chacune des six politiques de remplacement ?

b) En utilisant la méthode du flux monétaire annuel équivalent, déterminez le rythme optimal de remplacement de la machine.

Exercice 8 : Evaluation d'un projet en présence d'inflation

Soit une économie à trois biens et deux périodes t ($i = 1, 2$). Les prix de ces biens, en euros courants, sont respectivement égaux à $p_1 = (60, 110, 120)$ en t_1 et $p_2 = (80, 115, 130)$ en t_2 .

Le taux d'intérêt entre la période 1 et la période 2 est de 15 % (pour une opération de prêt ou d'emprunt effectuée en euros).

1° Afin de définir une règle de normalisation, considérons un panier comprenant 1 unité de bien 1, 2 unités de bien 2 et 1 unité de bien 3. Calculez le taux d'intérêt réel.

2° Envisageons une opération d'investissement qui permet d'obtenir 4 unités de bien 2 à la période 2 à partir de cinq unités de bien 1 et d'une unité de bien 2 à la période 1.

Faites le bilan de cette opération en supposant qu'en seconde période le prix du bien 2 suit le taux d'inflation général prévu de 10 %, puis en supposant que ce prix est égal à 115 euros.

Exercice 9 : *Modèle de Gordon et Shapiro*

La société Julien est cotée en bourse. Le cours actuel de chacune de ses actions est $C_1 = 50$ euros. Les analystes financiers anticipent une croissance des dividendes versés de 5%. Le dividende versé au prochain exercice est égal à 4 euros ; le prochain résultat par action est égal à 5 euros.

1° Quel est le taux de rentabilité espéré de l'action Julien ?

2° A quelle valeur le marché estime-t-il les opportunités de croissance de l'entreprise ? (On suppose que si la société Julien distribuait l'intégralité de son résultat sous forme de dividende, son résultat pourrait rester constant).

Exercice 10 : *les concepts de volatilité, duration et d'immunisation.*

Considérons maintenant un univers incertain.

Une obligation à revenus fixes est caractérisée par :

- ✓ sa valeur nominale (montant inscrit sur le titre),
- ✓ son taux facial (également inscrit sur le titre), ces deux termes servant de base pour le calcul des revenus versés ou coupons,
- ✓ son prix d'émission ou sa cotation en bourse (si elle est acquise après son émission),
- ✓ sa durée de vie ou sa maturité (période courant de la date d'acquisition à la date de remboursement),
- ✓ sa valeur de remboursement,
- ✓ son taux actuariel brut (le taux qui égalise le prix d'achat d'une obligation et la valeur actuelle des flux futurs hors impôt actualisés à ce taux. C'est l'équivalent du T.I.R. d'un projet d'investissement).

1° Un taux actuariel de x % signifie-t-il qu'une obligation achetée à ce taux rapportera effectivement un rendement de x % ?

2° Soit une obligation dont le cours est 1000 euros, la valeur nominale 1000 euros, remboursée *in fine* (à sa valeur nominale), le taux facial 10 % et d'une maturité de 10 ans.

a) Quel est son taux actuariel ?

b) En supposant que les taux d'intérêt montent soudainement à 12 %, quelle est la valeur (*i.e.* la cotation en bourse) de cette obligation ?

c) Si l'on revend maintenant ce titre, quel est le rendement « instantané » associé à cette opération ? Et, que devient ce rendement au bout de dix ans ?

d) Si l'on décide de conserver le titre jusqu'à sa maturité, et de placer les revenus perçus au nouveau taux d'intérêt, quel sera son rendement ? Commentez.

3° On considère un actif qui procure un revenu C_t à chaque date t ($t = [1, \dots, n]$) et dont la valeur de remboursement est V_n . On suppose que la structure des taux d'intérêt est plate ; le taux d'intérêt est égal à r .

a) Quel sera l'effet d'une variation infinitésimale positive du taux d'intérêt sur la valeur de marché P du titre ? On examinera successivement les cas d'une obligation «zéro-coupon», d'une rente perpétuelle et d'un titre à coupons constants.

b) On appelle *duration* l'expression suivante :
$$D = - \frac{\mathcal{I} P / P}{\mathcal{I} (1+r) / (1+r)}$$

Calculez la duration des trois cas particuliers d'actifs considérés précédemment. En quelle unité est-elle exprimée ?

c) Peut-on déduire de ces résultats l'étude du risque d'une obligation en fonction de sa maturité et de son taux actuariel (que l'on supposera égal au taux de coupon) ?

d) Critiquez la duration comme mesure du risque permettant de comparer deux obligations. Quelles autres applications de ce concept imaginez-vous dans la gestion des institutions financières ?

Exercice 11 : *Duration et Immunisation*

Une compagnie d'assurance-vie propose à ses clients des contrats dont les caractéristiques sont les suivantes : maturité : 8 ans ; taux de rendement : 5% ; aucune autre somme n'est ni versée ni perçue par les assurés jusqu'à l'échéance. Grâce aux fonds collectés, la compagnie souscrit des obligations *in fine* dont les caractéristiques sont les suivantes : maturité : 10 ans ; coupon constant et annuel : 250 euros ; nominal : 5000 euros.

On se situe immédiatement après l'émission des obligations ; le taux du marché est égal à 6%.

1° Quelle est la duration des contrats de capitalisation ?

2° Quel est le cours boursier de l'obligation achetée par la compagnie d'assurance ?

3° Quelle est la duration de cette obligation ?

4° La compagnie d'assurance désire replacer les coupons au taux du marché au fur et à mesure qu'elle les perçoit, puis revendre les obligations dans huit ans. Quel est le taux de rendement global de cette opération :

a) si l'on suppose que le taux d'intérêt passe à 5% avant le versement du premier coupon et reste à ce niveau pendant les 8 prochaines années ?

b) si l'on suppose que le taux d'intérêt passe à 7% avant le versement du premier coupon et reste à ce niveau pendant les 8 prochaines années ? Commentez.

Exercice 12 : Structure des taux au comptant et à terme

1° Une structure des taux d'intérêt, telle que les taux « courts » (3 mois) soient de 7,50 % et les taux « longs » (10 ans) soient de 8,30 %, signifie-t-elle que les agents forment des anticipations de hausse des taux courts futurs ?

2° Décrivez ce que pourrait être un marché à terme de taux d'intérêt.

3° En l'absence d'un tel marché, expliquez comment, sur un marché où coexistent des instruments financiers de différentes échéances, on peut toutefois réaliser des opérations de terme à terme, *i.e.* effectuer des placements ou emprunts à partir d'une date bien définie du futur pour une durée déterminée.

4° Le 1^{er} Octobre 1996, les taux au comptant à Paris étaient :

Durée de l'opération i	3 mois	6 mois	1 an
Taux coté : r_i	5,75	5,81	6,30

Quels étaient les taux futurs anticipés au 1^{er} Janvier 1997 pour trois mois et au 1^{er} Avril 1997 pour six mois ?

5° A cette même date, sur le M.A.T.I.F., la cotation des bons du trésor à 90 jours était :

Date de l'opération : t	Janvier	Avril	Juillet
Taux coté : ${}_t r_{3\text{mois}}$	5,81	6,80	7,20

En déduire la courbe des taux induite par le marché à terme, c'est à dire la suite des taux d'intérêt au 1^{er} Octobre 1996 d'échéances différentes, déduite des taux à terme du M.A.T.I.F. Quel(s)

arbitrage(s) cela vous suggère-t-il ? Exprimez, en base annuelle, taux de profit et gain en points de base permis par la ou les opérations.

**PARTIE II : FONCTION D'UTILITE, DOMINANCE STOCHASTIQUE,
AVERSION POUR LE RISQUE**

Exercice 13 : Aversion pour le risque et assurance

Soit un investisseur dont la fonction d'utilité est une fonction logarithmique du type :

$$U(W) = \ln(W)$$

où W est la richesse de cet agent.

Sa richesse de première période est supposée égale à 5 000 euros.

1° Supposons qu'il soit confronté à une situation où la probabilité de gagner ou de perdre 1000 euros est égale à 1/2. Si cet agent pouvait se protéger intégralement contre ce risque en versant 125 euros, déciderait-il de le faire ?

2° Supposons qu'il accepte de courir le risque du 1° et qu'il perde, ce qui réduit sa richesse à la somme de 4000 euros. S'assurerait-il dans les mêmes termes si le jeu du 1° lui était proposé à nouveau ?

3° Supposons maintenant que la richesse initiale du joueur soit de 10 000 euros. Quelle somme maximale serait-il prêt à payer pour ne pas s'exposer au risque décrit en 1° ?

Exercice 14 : Aversion pour le risque et assurance

Monsieur Melka possède une petite maison de campagne dont la valeur estimée est de 50 000 euros. Il détient de plus des SICAV court-terme pour une valeur de 20 000 euros, rémunérées à 7 % net d'impôts et des frais de chargement. L'assurance pour cette maison secondaire arrive à échéance dans deux mois et Monsieur Melka s'interroge sur l'utilité de la renouveler. Il obtient auprès de son assureur la table des événements suivants :

Perte potentielle : \tilde{P}	Probabilité associée à cette perte : $\text{Prob}[\tilde{P}]$
0	0,98
5 000 euros	0,01
10 000 euros	0,005

50 000 euros	0,005
--------------	-------

Son agent d'assurance propose trois possibilités de contrat dont la prime dépend de l'espérance de perte de l'assureur et que l'on présente dans le tableau suivant :

Montant <i>maximum</i> de perte couverte : \bar{P}	<i>Premium</i> correspondant à cette perte (<i>en euros</i>) : $p = f(\bar{P})$
30 000 euros	$30 + E(\tilde{P} \bar{P})$
40 000 euros	$27 + E(\tilde{P} \bar{P})$
50 000 euros	$24 + E(\tilde{P} \bar{P})$

où \bar{P} représente les x premiers euros d'un sinistre remboursé par l'assurance dans le cadre de la police souscrite.

Monsieur Melka ne prévoit ni d'augmenter ni de diminuer son épargne nette cette année (une fois la prime versée). Sa fonction d'utilité est logarithmique et de type : $U(W) = \ln(W)$

où W est sa richesse de fin de période.

On supposera pour simplifier que le paiement de primes est réglé en début d'année et le remboursement des sinistres en fin de celle-ci.

1° Quel sera le choix de Monsieur Melka quant au renouvellement de sa police d'assurance et quel contrat choisira-t-il ?

2° En supposant que son épargne liquide est, cette fois, de 320 000 euros au total, quel aurait été son choix ?

3° Quel aurait été son choix si sa richesse initiale était de 20 000 euros et sa fonction d'utilité du type suivant : $U(W) = -200\,000 \cdot W^{-1}$?

Exercice 15 : Fonction d'utilité et prime de risque

Deux agents, dont le comportement face au risque peut être représenté par une fonction d'utilité logarithmique, possèdent chacun un capital de 20 000 euros placé dans un actif A pour le premier et dans un actif B pour le second. A chaque actif correspond un type de risque différent :

- actif A : ♦ 50 % de chance de gagner 10 euros,
- ♦ 50 % de perdre 10 euros;

- actif B : ♦ 80 % de chance de gagner 1 000 euros,
- ♦ 20 % de perdre 10 000 euros;

Soit : $\tilde{W} = 20000 + \tilde{Z}_i$ où \tilde{W} est la richesse finale et \tilde{Z}_i l'aléa sur l'actif i , pour $i = [A, B]$.

On rappelle que la mesure de Arrow-Pratt de la prime de risque \mathbf{p} est telle que :

$$\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{s}_i^2}{2} \cdot \frac{U''(K)}{U'(K)}$$

où $K = 20\,000$ (la richesse initiale) et \mathbf{s}_i^2 la variance de la variable aléatoire \tilde{Z}_i .

On rappelle que la mesure \mathbf{r} de Markowitz est telle que :

$$E[U(\tilde{W})] = U[E(\tilde{W}) - \rho]$$

1° Calculez et comparez les primes de risque \mathbf{p} et \mathbf{r} de l'actif A.

2° Effectuez de même avec l'actif B. Commentez.

Exercice 16 : *Fonction d'utilité et aversion pour le risque*

Soit la fonction d'utilité exponentielle suivante : $U(W) = -e^{-aW}$

1° Représentez graphiquement cette fonction d'utilité en supposant que a est positif.

2° Déterminez l'expression de l'utilité marginale et de l'aversion pour le risque. Sont-elles positives ou négatives ?

3° Quelle est l'expression de l'aversion absolue pour le risque ?

4° L'aversion relative pour le risque est-elle constante ?

Exercice 17 : *Dominance stochastique et critère moyenne-variance*

Soient \tilde{X}_A et \tilde{X}_B les rendements de deux actions A et B. Les rendements suivent une distribution normale. Comparez les actions A ou B au sens des critères de dominance stochastique de premier ordre et de second ordre dans les trois cas suivant :

Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
$\mathbf{s}(\tilde{X}_A) > \mathbf{s}(\tilde{X}_B)$	$\mathbf{s}(\tilde{X}_A) = \mathbf{s}(\tilde{X}_B)$	$\mathbf{s}(\tilde{X}_A) < \mathbf{s}(\tilde{X}_B)$
$E(\tilde{X}_A) = E(\tilde{X}_B)$	$E(\tilde{X}_A) > E(\tilde{X}_B)$	$E(\tilde{X}_A) < E(\tilde{X}_B)$

Exercice 18 : Dominance stochastique et critère moyenne-variance

Soient les distributions de probabilité de deux actifs risqués X et Y, fonction de différents états de la nature indicés par i :

Probabilité de l'état de la nature i $Prob(X_i)$	Rendement de l'action X dans l'état i X_i	Probabilité de l'état de la nature i $Prob(Y_i)$	Rendement de l'action Y dans l'état i Y_i
0,10	- 10	0,20	2
0,40	5	0,50	3
0,30	10	0,20	4
0,20	12	0,10	30

1° Entre les deux portefeuilles totalement investis dans l'un ou l'autre des actifs, lequel répond au critère « moyenne-variance » ?

2° Lequel de ces deux portefeuilles sera choisi si, cette fois, le critère de dominance stochastique du second ordre est le critère de choix ?

Exercice 19 : Dominance stochastique

Deux investisseurs souhaitant placer 10 000 euros chacun, doivent choisir parmi six fonds d'investissements dont les distributions passées des rendements sont les suivantes :

Fonds	Probabilité que le rendement (en % annuel), soit égal à :																
	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	-	-	-	-	-	-	-	0.4	0.2	0.2	0.2	-	-	-	-	-	-
B	0.1	-	0.1	0.1	-	0.1	0.1				0.1		0.1	0.1	0.1	0.1	-
C	-	-	-	-	-	-	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	-	-	-	-	-	-
D	-	0.2	-	-	0.2	-	-	-	0.1	0.1	-	0.1	0.1	-	-	-	0.2
E	-	-	-	-	-	-	-	0.4	-	0.6	-	-	-	-	-	-	-
F	-	0.2	-	-	0.2	-	-	-	0.1	0.1	-	0.1	0.1	-	-	0.1	0.1

1° Ordonnez les six fonds en fonction du critère « espérance-variance ».

2° Comparez le précédent ordre avec celui issu du critère de dominance stochastique de second ordre.

3° Le premier investisseur est averse au risque. Quel sera son choix ?

4° Si vous n'aviez aucun renseignement sur l'aversion pour le risque du second investisseur, quel serait votre conseil de placement pour celui-ci ?

PARTIE III : CHOIX DE PORTEFEUILLE ET MEDAF

Exercice 20 : Portefeuilles efficaces

Considérons un marché financier où n'existent que deux titres risqués 1 et 2. L'espérance de leur taux de rendement ($m_{i=1,2}$) et la variance ($s_{i=1,2}^2$) de leur taux de rendement sont les suivantes :

$$m_1 = 1 \qquad m_2 = 2 \qquad s_1^2 = 1 \qquad s_2^2 = 4$$

1° Pour les trois cas suivants : $r_{1,2} = 1$ $r_{1,2} = -1$ $r_{1,2} = 0$

($r_{1,2}$ étant le coefficient de corrélation linéaire entre les rendements des actifs 1 et 2)

a) déterminez l'équation de l'ensemble des portefeuilles possibles,

b) représentez graphiquement l'ensemble des portefeuilles possibles et l'ensemble des portefeuilles efficaces.

c) Quels sont ces ensembles si les ventes à découvert sont interdites ?

2° Supposons maintenant qu'il existe un actif sans risque et limitons nous au cas où les deux actifs risqués ne sont pas corrélés. Le taux sans risque est $R_f = 0,5$.

a) Déterminez l'équation de la droite de marché. Représentez graphiquement l'ensemble des portefeuilles possibles puis l'ensemble des portefeuilles efficaces.

b) Quels seront les portefeuilles choisis par trois investisseurs A, B et C dont les fonctions d'utilité sont respectivement :

$$U_A(m, s) = m - s \qquad U_B(m, s) = m - 0.5s \qquad U_C(m, s) = m - s^2 ?$$

Exercice 21 : Portefeuille optimale et frontière efficiente

Soit un portefeuille constitué de n titres définis par leur espérance de rendement et leurs corrélations mutuelles. On définit les notations suivantes :

R : le vecteur colonne des rendements,

- \bar{R} : le vecteur colonne de espérances de rendements,
- e : le vecteur colonne unité,
- a : le vecteur colonne des proportions investies dans le portefeuille risqué,
- r : le taux d'intérêt sans risque,
- a_0 : la proportion investie dans l'actif sans risque,
- Ω : la matrice de variance-covariance des rendements,
- r, s^2 : les espérance et variance du portefeuille total,
- r_R, s_R^2 : les espérance et variance du portefeuille risqué.

1° Ecrire le programme de minimisation de la variance d'un tel portefeuille sous forme matricielle, en l'absence, puis en présence d'un actif sans risque.

2° En supposant que la matrice des variances-covariances des rendements est inversible, résoudre le programme en l'absence puis en présence d'un actif sans risque.

Exercice 22 : Portefeuille optimal

Vous devez investir votre argent dans trois titres A, B et C dont les taux de rentabilité ont pour espérances, variances et covariances les valeurs suivantes :

Variances-covariances			
Titres	A	B	C
A	12	-5	8
B	-5	36	12
C	8	12	10

Espérances
10 %
15 %
7 %

1° Vous répartissez votre argent entre les trois actifs à parts égales. Quelle est l'espérance et le risque (mesuré par l'écart-type) du taux de rentabilité de votre portefeuille ainsi constitué ?

2° Vous allouez 50 % de votre capital à l'acquisition de titre B et 25 % à l'achat de chacun des titres A et C. Calculez l'espérance de rendement et le risque de ce nouveau portefeuille.

3° Montrez qu'il est possible de construire un nouveau portefeuille dont les performances sont meilleures que celles des deux portefeuilles précédents en négligeant l'actif C. Pourquoi en est-il ainsi ?

Exercice 23 : Fonction d'utilité et portefeuille optimal

Soit une économie caractérisée par l'existence de n actifs risqués et d'un actif sans risque.

On considère un investisseur qui maximise l'espérance de son utilité $E[U(Q)]$ où Q est sa richesse de fin de période.

On suppose que $U(\cdot)$ est une fonction d'utilité quadratique telle que : $U(Q) = -(b - Q)^2$ avec b suffisamment grand pour que $\text{Prob}(Q > b) = 0$.

On note W la richesse initiale de l'agent.

1° En reprenant les notations de l'exercice 21, déterminez le portefeuille qui maximise l'espérance de l'utilité de l'investisseur.

2° Montrez comment le portefeuille optimal change lorsque b croît.

3° Est-ce que l'investisseur présente une plus grande aversion vis à vis du risque lorsque b croît, à un niveau donné de richesse compris entre 0 et b ?

4° Comment varie la taille du portefeuille risqué lorsque la richesse initiale s'accroît ?

Exercice 24 : Risque systématique et risque spécifique

Considérons un marché financier efficient et notons :

\tilde{R}_j le rendement aléatoire d'un portefeuille efficient j ;

R_F le rendement du titre sans risque, supposé unique et constant;

\tilde{R}_m le rendement aléatoire du portefeuille de marché m ;

$E(\cdot)$ et $\mathcal{S}(\cdot)$ respectivement les opérateurs espérance mathématique et écart-type.

Sachant que : $E(\tilde{R}_j) = 20\%$, $R_F = 5\%$, $E(\tilde{R}_m) = 15\%$ et $\mathcal{S}(\tilde{R}_m) = 20\%$,

1° Quel est le bêta du portefeuille efficient j ? Calculez $\mathcal{S}(\tilde{R}_j)$ l'écart-type du rendement du portefeuille j . Calculez le coefficient de corrélation - noté $r_{j,m}$ - entre le rendement du portefeuille j et le rendement du portefeuille de marché m .

2° En plus des données du 1°, considérons maintenant une action k dont les caractéristiques sont : $E(\tilde{R}_k) = 25\%$ et $\text{Var}(\tilde{R}_k) = 52\%$ où \tilde{R}_k est le rendement aléatoire de l'action k . Quel est le risque systématique du titre k et quel est son risque spécifique ? Commentez.

Exercice 25 : Décomposition du risque d'un actif

Une analyse financière de trois titres A, B et C a conduit aux évaluations suivantes de leurs caractéristiques :

Titre	Bêta	Risque spécifique (σ^2)	Covariance des erreurs	Valeur
A	0,48	35 %	$\text{Cov}(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$	-0.0171
B	0,98	21 %	$\text{Cov}(\varepsilon_A, \varepsilon_C)$	-0.026
C	1,12	30 %	$\text{Cov}(\varepsilon_B, \varepsilon_C)$	-0.04322

Le taux d'intérêt de l'actif sans risque est de 12 %. Le taux de rentabilité du portefeuille de marché a une espérance de 21 % et un écart type de 24 %. On construit un portefeuille partagé également entre les trois titres.

- 1° Calculez l'espérance du taux de rentabilité de ce portefeuille.
- 2° Calculer son risque irréductible.
- 3° Calculer son risque spécifique ou réductible.
- 4° Calculer son risque total.

Exercice 26 : *Modèle de Black*

Soient les matrices de variance-covariance et les espérances de rendement pour deux actifs X et Y :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,0064 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{R}_i = [0,2 \quad 0,1]$$

- 1° Quel est le rendement espéré d'un portefeuille « zéro-bêta », sachant que le portefeuille de marché est composé pour moitié de l'actif X et pour moitié de l'actif Y ?
- 2° Quel est le vecteur des poids du portefeuille de variance minimum ?
- 3° Quelle est la covariance entre ce portefeuille de variance minimum et le portefeuille « zéro-bêta »? Montrez que la covariance entre le rendement d'un portefeuille quelconque (efficient ou non) et celui du portefeuille de variance minimum est égal à une constante.
- 4° Donnez l'équation de la droite de marché.

Exercice 27 : *Actifs contingents*

Le 1^{er} Janvier 1998, vous disposez d'un patrimoine K et vous souhaitez le répartir entre les titres 1 et 2 (*Market Securities*), qui coûtent respectivement 8 euros et 9 euros. Leur valeur de fin

d'année dépendra de l'état de la nature qui prévaudra alors. Les états possibles sont au nombre de deux et les valeurs des titres correspondant à ces états figurent dans le tableau suivant :

		Etats de la nature	
Titres		1	2
1		10 euros	20 euros
2		30 euros	10 euros

On suppose de plus l'existence d'un marché complet.

1° Calculer le prix initial de chacun des actifs Arrow-Debreu (*Pure Securities*) correspondant aux deux états de la nature¹.

2° Si vous désirez constituer un portefeuille non risqué, c'est à dire dont la valeur de fin d'année ne dépende pas de l'état de la nature qui prévaudra alors, et en supposant les titres parfaitement divisibles, combien de chacun des deux titres devrez-vous acheter ?

3° Quel est le taux d'intérêt certain à une période ?

Exercice 28 : Application du MEDAF au choix de projet en univers incertain

Considérons un projet dont la mise en œuvre coûte 100 000 euros cette année. L'espérance mathématique de son gain est de 220 000 euros l'an prochain et de 250 000 euros dans deux ans. Le bêta du projet est de 0,8 et le taux d'intérêt sans risque est de 8 % . La prime de risque du portefeuille de marché est de 12 %. Calculez la Valeur Actualisée Nette du projet.

¹ On rappelle qu'un tel actif rapporte par définition 1 euro lorsqu'un état de la nature (*s*) se réalise, 0 sinon.

PARTIE IV : THEOREME DE MODIGLIANI-MILLER

Exercice 29 : Modigliani-Miller

Cet exercice propose d'étudier le théorème de Modigliani-Miller suivant lequel la valeur de marché d'une entreprise est indépendante de sa structure financière. On considère pour cela une économie dans laquelle sont présents I investisseurs financiers ($i = [1, \dots, I]$) et J entreprises ($j = [1, \dots, J]$).

Chaque entreprise émet des actions, dont le prix global est P_j . Il existe un marché obligataire sur lequel s'échangent des titres sans risque dont le taux de rendement est noté r^2 .

L'activité de l'entreprise j est résumée par la donnée de sa valeur future \tilde{X}_j . Les \tilde{X}_j sont des variables aléatoires. Chaque entreprise se finance en émettant, outre des actions, un montant B_j d'obligations (donné *a priori*). La valeur de marché de la firme est égale à :

$$V_j = P_j + B_j$$

L'investisseur financier i est caractérisé par sa richesse initiale W_0^i et sa fonction d'utilité $U(\tilde{W}^i)$, où \tilde{W}^i désigne sa richesse de fin de période. Il doit décider de la part de son investissement consacrée à l'achat d'obligations soit B^i , et de la fraction α_j^i des actions émises par l'entreprise j qu'il souhaite détenir.

- 1° Pourquoi la valeur de marché de l'entreprise est-elle égale à V_j ?
- 2° Ecrivez la contrainte budgétaire de l'investisseur i . Quelle est sa richesse de fin de période ?
- 3° Ecrivez les conditions d'équilibre des deux marchés financiers.
- 4° Vérifiez que la valeur d'une entreprise est indépendante de sa structure financière, c'est à dire des données B_j . Interprétez ce résultat.

² On suppose donc l'absence de risque de faillite.

Exercice 30 : *Evaluation d'une entreprise*

Considérons quatre structures de passifs possibles pour une même entreprise en début d'année, dans un univers sans taxe où le théorème de Modigliani-Miller est valide.

L'excédent net d'exploitation, que l'on anticipe pour l'exercice comptable à venir, a une espérance mathématique de 10 000 000 euros et un écart-type de 7 000 000 euros.

Les emprunts de l'entreprise sont contractés à un taux de 8 %. Le taux de rentabilité des titres d'une entreprise non-endettée appartenant à la même classe de risque que la firme considérée est de 10 %.

1° Complétez le tableau suivant :

		Etat du passif			
		1	2	3	4
Dettes / Valeur de l'entreprise	(en %)	0	25	50	75
Excédent Net d'Exploitation espéré	(en ME)	10	10	10	10
Intérêt versés	(en ME)				
Résultat Net espéré	(en ME)				
Valeur de l'entreprise	(en ME)				
Valeur de la Dette	(en ME)				
Valeur Total des actions	(en ME)				
Taux de Rentabilité espéré des actions	(en %)				
Ecart-type de l'Excédent Net d'Exploitation	(en ME)	7	7	7	7
Ecart-type du Taux de rentabilité des actions	(en %)				

2° Montrez que l'espérance mathématique du taux de rentabilité des actions est une fonction linéaire de l'écart-type de ce taux.

Exercice 31 : *Politique de dividende*

Nous supposerons, dans cet exercice, que les conditions de validité du théorème de Modigliani-Miller sont remplies. Considérons une entreprise, non-endettée, disposant d'un *cash-flow* de 1 000 000 euros. Sa valeur hors ce *cash-flow* est de 20 000 000 euros et sa capitalisation boursière est constituée de 1 000 000 d'actions. Deux politiques financières sont considérées :

1° Distribuer la totalité du *cash-flow* aux actionnaires et n'émettre aucune action nouvelle. Quels sont alors le dividende par action et le cours de celle-ci (après distribution) ?

2° Distribuer 1 200 000 euros aux actionnaires courants et financer les 200 000 euros manquant par émission d'actions nouvelles. En supposant que la moins value boursière de l'action ancienne soit égale aux dividendes supplémentaires dont elle bénéficie, combien faut-il émettre de nouvelles actions et à quel cours ?

Exercice 32 : Valeur de la firme

Considérons une entreprise qui n'a pas de dette et dont les fonds propres ont une valeur de 565 millions d'euros. Elle décide de racheter pour 170 millions d'euros d'actions en s'endettant d'autant. Le taux de l'impôt sur les bénéfices est de 50 %, et les intérêts versés en sont dispensés. De combien va augmenter la valeur de la firme ?

Exercice 33 : Coût du capital

Considérons une entreprise dont l'action vaut 50 euros en bourse le 1^{er} janvier 1999. Le marché anticipe que les dividendes qui seront versés en Juin 1999 représenteront 3,08 euros par action. Dans le passé, l'entreprise avait un rapport *Profit par action / Valeur Comptable*, noté R.O.E.³, de 10 %, et elle réinvestissait 40 % de ce profit.

1° Sachant que les ratios anticipés continueront, par hypothèse, de prévaloir dans le futur, quel est le taux de croissance des dividendes par action prévisible pour le futur ?

2° En déduire le taux de rentabilité des titres appartenant à la classe de risque de l'action de cette firme (Market Capitalization Rate).

³ R.O.E. pour « *Return On Equity* ».

Références bibliographiques :

- Brealey A. R., S. C. Myers et P. Laroche**, (1984),
Principe de gestion financière des sociétés,
Mac Graw-Hill Editor, Second Edition, 1992.
- Charreaux G.**
Gestion Financière. Principes - Etudes de cas - Solutions,
LITEC Editeur.
- Copeland T. E. and J. F. Weston**, (1988),
Financial Theory and Corporate Policy,
Adison Wesley Editor, Third Edition, 1988.
- Dumas B. et B. Allaz**, (1995),
Marchés financiers. gestion de portefeuille et des risques,
PUF, 1995.
- Elton E. J. and M. J. Gruber**, (1981),
Modern Portofolio Theory and Investment Analysis,
John Wiley & Sons Editor, Fourth Edition, 1991.
- Huang C. and R. H. Litzenberger**, (1988),
Foundations for Financial Economics,
North Holland Publisher, 1988.
- Ingersoll J. E.**, (1987),
Theory of Financial Decision Making,
Rowman and Littlefield Publishers, 1987.
- Jacquillat B. et B. Solnik**, (1981),
Marchés financiers. gestion de portefeuille et des risques,
Dunod, Seconde Edition, 1991.
- Laffont J.-J.**, (1991),
Economie de l'incertain et de l'information,
Volume 2 du cours de théorie microéconomique,
Economica, Seconde Edition, 1991.
- Poncet P. et R. Portrait**, (1994),
Mathématiques financières,
Dunod Gestion, 1994.
- Quittard-Pinon F.**, (1993),
Marchés des capitaux et théorie financière,
Economica Gestion, 1993.
- Viala P. et E. Briys**, (1995),
Eléments de théorie financière,
Nathan, 1995.

