28

La théorie moderne du portefeuille : théorie et applications

Patrice Poncet et Roland Portait

Patrice Poncet est professeur à l'ESSEC Business School. Diplômé de l'ESSEC, maîtrise de droit privé (Paris-II Assas), agrégé des Universités en sciences de gestion, et PhD en finance de l'université de Northwestern (Kellogg School). Ex-directeur du M2 Recherche « Finance de marché » et de l'école doctorale en sciences de gestion de l'université Paris-I Panthéon-Sorbonne. Consultant à la Société Générale. Auteur de nombreux ouvrages (dont Dynamic Asset Allocation with Forwards and Futures et Finance de marché *(avec Roland Portait)) et articles (dont* Management Science, Journal of Economics, Dynamics and Control, Journal of Banking and Finance, European Economic Review, Finance…*).*

Roland Portait est professeur titulaire de la chaire de finance au CNAM et professeur à l'ESSEC Business School. Ingénieur des télécommunications, diplômé de l'Institut d'études politiques de Paris, et PhD en finance de la Wharton School. Directeur du master professionnel de « Finance de marché et gestion de capitaux » au CNAM et consultant auprès d'institutions financières. Auteur de nombreux ouvrages (dont Les Décisions financières de l'entreprise et Finance de marché *(avec Patrice Poncet)) et articles (dont* American Economic Review, Management Science, Journal of Business, Journal of Economics, Dynamics and Control, European Economic Review, Finance…*).*

Introduction

La théorie moderne du portefeuille est née en 1952 avec la publication de l'article fondateur de Harry Markowitz. En partant du postulat que le risque d'un portefeuille peut être correctement mesuré par la variance de sa rentabilité, Markowitz explicite et formalise le dilemme fondamental de la finance moderne : obtenir une rentabilité faible mais certaine, ou accepter de prendre un risque dans l'espoir d'accroître cette rentabilité, l'espérance de rentabilité étant d'autant plus élevée que le risque est important. Il formalise et quantifie également l'effet de diversification selon lequel une combinaison judicieuse de nombreux actifs dans un *portefeuille* permet de réduire le risque total subi pour un taux de rentabilité espérée donné. Les travaux de Markowitz devaient s'avérer extrêmement importants et modifier profondément la façon de concevoir les problèmes financiers. Ils montrent, en particulier, que l'intérêt d'investir dans un titre financier ne doit pas être évalué séparément mais dans le cadre de l'ensemble du portefeuille constitué par l'investisseur et d'un marché concurrentiel où de nombreux véhicules d'épargne (actions, obligations, dépôts à terme, immobilier, foncier, etc.) sont en compétition.

Une dizaine d'années après les travaux de Markowitz et sur les bases de ces derniers, Sharpe, Lintner et Mossin développèrent un modèle (le modèle d'équilibre des actifs financiers ou MEDAF) qui aboutit, sous certaines hypothèses, à la rentabilité espérée d'équilibre d'un titre quelconque. Et une dizaine d'années plus tard, dans les années soixante-dix, en s'appuyant sur des modèles multifactoriels, S. Ross développa une alternative au MEDAF nommée APT (*arbitrage pricing theory*). Le modèle de Markowitz, le MEDAF et l'APT constituent le noyau de la théorie classique du portefeuille.

Nous présentons la théorie des choix dans l'incertain et le paradigme espérance-variance sur lequel les modèles classiques sont fondés (**$$ p. 00 $$**), le concept de diversification et sa formalisation (**$$ p. 00 $$**), la construction des portefeuilles efficients (modèle de Markowitz) (**$$ p. 00 $$**), le modèle d'équilibre des actifs financiers (**$$ p. 00 $$**), les modèles factoriels (**$$ p. 00 $$**), l'APT (**$$ p. 00 $$**), les problèmes de mise en œuvre et des applications (**$$ p. 00 $$**), et un résumé des principaux concepts et résultats en guise de conclusion (**$$ p. 00 $$**).

CHOIX RATIONNELS DANS L'INCERTAIN : AVERSION AU RISQUE, ESPÉRANCE D'UTILITÉ ET PARADIGME ESPÉRANCE-VARIANCE

Ce paragraphe présente succinctement la théorie des choix dans l'incertain et le critère espérance-variance.

Les choix financiers dans l'incertain et le critère de l'espérance de l'utilité

Il s'agit de déterminer la décision optimale parmi des alternatives conduisant à différents gains (ou pertes) aléatoires $\widetilde{W}$ prenant un nombre fini de valeurs $(w_1,\ldots,w_N)$ avec des probabilités respectives $(p_1,\ldots, p_N)$. On peut interpréter $\widetilde{W}$ comme la valeur positive (gain) ou négative (perte) du gain généré par une loterie et il s'agit d'établir un critère qui permette de comparer différentes loteries afin de choisir la « meilleure ».

Avant les travaux de Bernoulli et Cramer, au début du XVIII^e siècle, « l'attrait » d'une loterie était censé être fondé sur l'espérance mathématique de son gain $\widetilde{W}$:

$$E(\widetilde{W}) = \sum_{i=1}^{N} p_i w_i$$

Selon une telle conception, un individu rationnel devrait être indifférent entre la loterie au résultat incertain $\widetilde{W}$ et une somme certaine égale à E ($\widetilde{W}$) et, entre plusieurs loteries, devrait préférer celle qui a l'espérance de gain la plus élevée.

Cet *a priori* simpliste est en fait contredit par le comportement effectif de la plupart des individus face au risque. Donnons-en un contre-exemple.

Soit une loterie $\widetilde{W}$ donnant, avec des probabilités égales, soit 0 soit 100 000 euros. La plupart des individus préfèrent une somme certaine de 50 000 euros à la somme aléatoire $\widetilde{W}$ alors même que E($\widetilde{W}$) = 50 000 euros.

Cette préférence pour le résultat certain reflète l'aversion au risque qui caractérise la plupart des agents économiques. Cette aversion est liée au fait que l'utilité marginale de l'euro supplémentaire décroît. En effet, l'individu rationnel classe ses projets de dépense par ordre de priorité décroissante : les 50 000 premiers euros sont affectés à des projets plus « utiles » que les 50 000 euros suivants et, de ce fait, l'utilité de 100 000 euros est inférieure au double de l'utilité de 50 000 euros. On dit que l'utilité marginale de la richesse diminue et que l'« équivalent certain » de la loterie $\widetilde{W}$, qui dépend en fait de chaque individu, est strictement inférieur à 50 000 euros.

Ces idées, introduites par Bernoulli et Cramer dès le XVIII[e] siècle, ont été systématisées et rigoureusement formalisées par le mathématicien John Von Neumann, associé à l'économiste Oscar Morgenstern (VNM ci-après). Dans un ouvrage fondamental publié en 1944, VNM démontrèrent formellement que tout individu obéissant à quelques principes de rationalité cherche à maximiser, non pas l'espérance de sa richesse, mais *l'espérance de l'utilité de sa richesse*. Synthétiquement, le programme d'un individu confronté à des choix aux conséquences aléatoires se résume à maximiser $E\left[U\left(\widetilde{W}\right)\right]$.

La fonction d'utilité $U(.)$ traduit les préférences de chaque individu, lui est spécifique, et dépend notamment de sa richesse initiale au moment de la décision et de son aversion au risque. Cependant, la fonction d'utilité $U(.)$ de la plupart des individus, possède les deux caractéristiques suivantes : (*i*) elle est croissante avec la richesse (on désire toujours être plus riche) ; dès lors, si elle est dérivable : $U'(.) > 0$; (*ii*) elle est concave (la pente $U'(.)$ décroît donc $U''(.) < 0$) ; cette concavité traduit, sur le plan mathématique, non seulement la décroissance de l'utilité marginale, mais aussi l'aversion à l'égard du risque.

Cet individu dont la richesse initiale est égale à W_0, est confronté à la décision d'investir x euros qui rapporteront $x - y$ ou $x + y$ avec des probabilités égales à 0,5 : le profit ($+ y$ ou $- y$) a donc une espérance nulle.

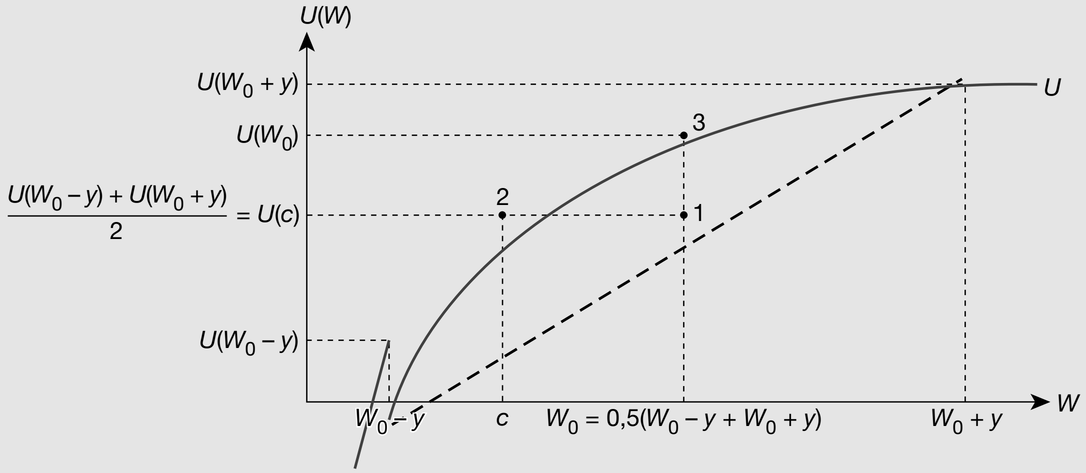
En absence d'investissement, la richesse de W_0 génère une utilité de $U(W_0)$ (*cf.* le point 3 sur la figure 28.1). En revanche, si l'opération est entreprise, l'utilité sera soit égale à $U(W_0 - y)$ (avec une

Exemple

Soit un agent économique dont la richesse initiale est de 100 K€. Cet individu pourrait entreprendre un investissement dont la mise initiale est de 50 K€ et qui peut lui rapporter soit 100 K€ avec la probabilité 0,5 soit 0,00 euro avec la probabilité 0,5. L'espérance du gain est donc nulle ($0{,}5 \times (150+50) - 100$) et l'individu qui maximiserait l'espérance de la valeur de son patrimoine serait indifférent entre les deux termes de l'alternative entreprendre/ne pas entreprendre. Tel ne serait pas le cas si sa fonction d'utilité était concave, par exemple la fonction logarithme népérien (ln). En effet, si l'investissement n'est pas entrepris, l'espérance de l'utilité de sa richesse est : $\ln(100) = 4{,}60$. Dans l'éventualité où l'investissement serait entrepris, sa richesse serait aléatoire et égale à 150 (avec probabilité 0,5) ou 50 (avec probabilité 0,5). L'espérance d'utilité de cette richesse est de : $0{,}5 \ln(150) + 0{,}5 \ln(50) = 4{,}46$. L'individu n'entreprendra pas l'investissement considéré car l'espérance d'utilité de la richesse qui en résulte est inférieure à celle de sa richesse initiale. On remarquera que la fonction $\ln(W)$ satisfait bien les deux propriétés requises d'une fonction d'utilité : elle est croissante et concave ($d \ln(W)/dW = 1/W > 0$; $d^2 \ln(W)/dW^2 = -1/W^2 < 0$).

Cet exemple peut être aisément généralisé pour mettre en évidence le fait que la concavité de la fonction d'utilité traduit simultanément le caractère décroissant de l'utilité marginale de la richesse et l'aversion à l'égard du risque. Considérons un individu dont la fonction d'utilité est concave quelconque (pas nécessairement logarithmique) et représentée graphiquement par la courbe en rouge sur la figure 28.1.

Figure 28.1 Aversion au risque et concavité de U



probabilité de 0,5), soit à $U(W_0 + y)$ (avec une probabilité de 0,5). Remarquons que $E[U(\widetilde{W})] = \dfrac{U(W_0 - y) + U(W_0 + y)}{2}$ (ordonnée du point 1 sur la figure) et qu'elle est inférieure à $U(W_0)$.

On remarquera aussi qu'il existe une richesse certaine *c* qui génère la même utilité que celle de la richesse aléatoire dans l'hypothèse de réalisation de l'investissement ; *c* est tel que :

$$U(c) = \mathrm{E}\,[\,U(\widetilde{W})\,] = \frac{U(W_0 - y) + U(W_0 + y)}{2} \quad (\textit{cf.}\text{ le point 2 sur la figure 1}).$$

c s'interprète comme « l'équivalent certain » de $\widetilde{W}$ car l'agent est indifférent entre la richesse certaine *c* et la richesse incertaine $\widetilde{W}$, puisqu'il obtient dans les deux cas la même espérance d'utilité.

On retiendra enfin (*cf.* figure 28.1) que, du fait de la concavité de U : $c < \mathrm{E}(\widetilde{W}) = W_0$; donc :

$\mathrm{E}\,[U(\widetilde{W})] = U(c) < U(W_0) = U\,[\mathrm{E}(\widetilde{W})]$, (comparer les ordonnées des points 2 et 3 sur la figure 28.1).

Pour résumer, une loterie incertaine $\widetilde{W}$ a moins d'attrait qu'une somme certaine égale à $\mathrm{E}(\widetilde{W})$. Ce résultat qui révèle l'aversion à l'égard du risque de l'agent (interprétation financière) résulte de la concavité de *U*, comme cela apparaît clairement sur le graphique.

Le critère espérance-variance

L'utilisation de fonctions d'utilité générales s'avère souvent complexe et ne conduit pas à des solutions analytiques. C'est la raison pour laquelle Markowitz simplifia le problème du choix dans l'incertain de l'investisseur afin de le résoudre de manière simple et explicite. Son idée consista à mesurer le risque affectant une richesse $\widetilde{W}$ (ou de la valeur globale d'un portefeuille) par la *variance* de celle-ci [notée $\sigma^2(\widetilde{W})$]. L'investisseur est alors présumé prendre ses décisions en fonction seulement de deux paramètres : l'*espérance* de sa richesse, $\mathrm{E}(\widetilde{W})$, qu'il souhaite la plus grande possible, et sa *variance*, $\sigma^2(\widetilde{W})$, qu'il désire la plus faible possible. Il s'agit du critère espérance-variance (E-V dans la suite).

Il est important de déterminer les conditions qui rendent le critère E-V compatible avec celui de VNM de maximisation de l'espérance d'utilité, car seul ce dernier est théoriquement fondé. En fait, il est facile de montrer que, dans deux cas, celui d'une fonction d'utilité quadratique d'une part, et celui d'une richesse distribuée selon une loi Normale (gaussienne), d'autre part, le critère E-V est bien impliqué par la rationalité de VNM[1].

1. Dans le cas d'une fonction d'utilité quadratique ($U(W) = W - aW2$; $a > 0$; domaine de définition de la richesse restreint à la partie ascendante de la parabole représentative de l'utilité : $W < 1/(2a)$), la maximisation de l'espérance de l'utilité $\mathrm{E}(\widetilde{W}) - a\,\mathrm{E}(\widetilde{W}2)$ conduit, pour $\mathrm{E}(\widetilde{W}) = k$ donné, à préférer, quel que soit *k*, la richesse minimisant $\mathrm{E}(\widetilde{W}2)$, donc celle qui minimise $\$\$(\widetilde{W}) = \mathrm{E}(\widetilde{W}2) - k2$: l'agent à préférences quadratiques applique donc le critère E-V. Dans le cas gaussien, toute la distribution de la richesse $\widetilde{W}$ est caractérisée par les seuls deux paramètres $\mathrm{E}(\widetilde{W})$ et $\$\$(\widetilde{W})$; on peut alors écrire, pour toute fonction d'utilité U : $\mathrm{E}\left[\mathrm{U}(\widetilde{W})\right] = f\left(\mathrm{E}(\widetilde{W}), \$\$(\widetilde{W})\right)$.

L'investisseur qui obéit le critère E-V maximise donc une fonction $f\,(E(\tilde{W}), \sigma^2\,(\tilde{W})$.

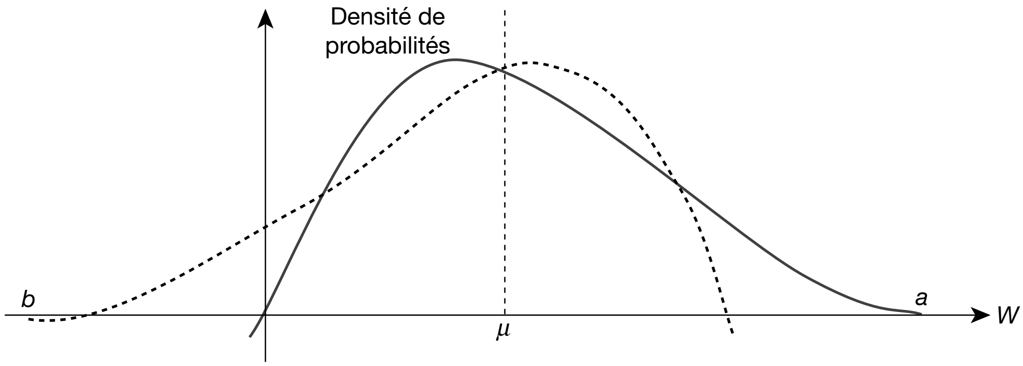
où f est une fonction croissante de E et décroissante de σ^2 : à variance $\sigma^2(\tilde{W})$ donnée, il prend la décision qui conduit à l'espérance maximale de richesse, et, à espérance $E(\tilde{W})$ donnée, il minimise la variance $\sigma^2(\tilde{W})$. L'avantage décisif de cette formalisation E-V, outre sa simplicité, est qu'elle permet de raisonner graphiquement dans un espace à deux dimensions seulement, facilitant ainsi le raisonnement et guidant l'intuition.

Notons de plus que si le critère E-V a l'avantage de la simplicité et est théoriquement fondé dans les deux cas précités d'une utilité quadratique ou d'une distribution gaussienne de la richesse, il est dans les autres cas « *ad hoc* » et très critiquable à différents égards. Parmi les inconvénients, remarquons que l'appréciation du risque à l'aide de la variance conduit à considérer équivalentes les déviations positives par rapport à la moyenne et les déviations négatives. Par exemple, les deux distributions de probabilité des deux richesses $\tilde{W}_a$ et $\tilde{W}_b$ de la figure 28.2, qui ont la même moyenne μ et la même dispersion autour de μ, sont équivalentes pour l'investisseur qui suit le critère E-V.

Par construction, ces deux distributions sont asymétriques mais symétriques l'une de l'autre par rapport à un axe vertical passant par μ, leur moyenne commune. Elles ont donc aussi la même variance, mais l'asymétrie est négative pour $\tilde{W}_b$ (assez forte probabilité de *très* petites valeurs et très faible probabilité de très grandes valeurs), et positive pour $\tilde{W}_a$.

Or les agents économiques ne sont pas en général indifférents à cette asymétrie. En général l'aversion au risque est associée à une préférence pour une asymétrie positive, telle que $\tilde{W}_a$, à faible risque d'encourir de très fortes pertes. Le critère E-V ne capture donc pas, en général, tous les aspects de l'aversion au risque.

Figure 28.2



LA DIVERSIFICATION DES PORTEFEUILLES

Pour un investisseur obéissant au critère espérance-variance, il s'agit pour résoudre le programme précédent de comprendre comment se comportent l'espérance et la variance du portefeuille en fonction de caractéristiques de rentabilité et de risque des titres le constituant. L'espérance de rentabilité du portefeuille est, du fait que l'espérance mathématique est un opérateur linéaire, la moyenne pondérée des espérances de rentabilité de chacun des titres qui le composent. La *contribution* de chaque titre à la rentabilité espérée du portefeuille est donc directement proportionnelle à sa rentabilité attendue[1].

Quant au risque, nous pouvons mesurer celui du portefeuille par la variance (ou l'écart-type) de sa rentabilité. Mais ce qui est vrai pour un portefeuille ne l'est pas pour un titre individuel. En effet, le risque induit par un titre individuel i pour l'investisseur détenant le portefeuille P doit se mesurer par la *contribution* de i au risque global de P (comme c'est sa contribution à l'espérance de ce dernier qui doit être retenue). Il est faux de mesurer le risque induit par i par la variance ou l'écart-type de sa rentabilité car c'est en fait sa corrélation avec la rentabilité de P qui constitue le facteur essentiel de ce risque.

Pour comprendre intuitivement cette assertion fondamentale de la théorie du portefeuille, considérons un titre i négativement corrélé avec le portefeuille P : quand les performances de i sont mauvaises, celles de P ont une forte probabilité d'être bonnes et vice versa. Le titre i tend par conséquent à tirer la rentabilité globale du portefeuille vers sa moyenne et donc à réduire l'amplitude de ses variations. Il réduit ainsi le risque global, bien qu'il puisse avoir une variance très élevée. Au contraire, si i est fortement et positivement corrélé avec P, les fluctuations de sa rentabilité sont en général dans le même sens que celles des autres titres et sa détention augmente la variance globale (donc l'écart-type du portefeuille), même si sa variance (ou écart-type) est faible.

Ces considérations intuitives conduisent donc à *appréhender le risque induit par un titre par la covariance de sa rentabilité avec celle du portefeuille* ($cov(R_i, R_P)$ $\sigma_{i,\ P}$). Plus précisément, on mesure le risque du titre i immergé dans le portefeuille P par le rapport $\sigma_{i,\ P/P}$ (en prenant comme mesure de risque pour P son écart-type).[2] C'est ce ratio qui mesure la contribution marginale du risque de l'actif i au risque total du portefeuille. Ce résultat entraîne deux conséquences importantes :

- bien qu'un titre risqué ait par définition une variance positive, le risque (marginal) d'un tel actif est négatif (respectivement, positif) si sa covariance avec le portefeuille dans lequel il est englobé est négative (respectivement, positive) ;

---

1. En notant x_i les poids des titres risqués dans le portefeuille P tels que $\sum_i^n x_i = 1$, l'espérance de la rentabilité de P est égale à : $\mathrm{E}\left(R_p\right) = \sum_i x_i\ \mathrm{E}\left(R_i\right)$. Dans le texte, nous noterons plus conventionnellement et succinctement $\mathrm{E}(R) \equiv \mu$.

2. En effet, toujours avec x_i les poids des titres risqués dans le portefeuille P, la variance de la rentabilité de P est égale à $\sigma_P^2 = \sum_i^n \sum_j^n x_i\, x_j\, \sigma_{ij}$ où σ_{ij} est la covariance entre les titres i et j et σ_i^2 la variance de i. D'où l'on tire : $\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial x_i} = 2\sum_j^n x_j\, \sigma_{ij} = 2\sigma_{iP}$. Par ailleurs, on a : $\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial x_i} = 2\sigma_P \frac{\partial \sigma_P}{\partial x_i}$. Il ressort de ces deux équations que $\frac{\partial \sigma_P}{\partial x_i} = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P}$.

- comme tous les portefeuilles des investisseurs sont *a priori* différents, il n'est pas possible (pour l'instant !) de répondre à la question simple suivante : « Quel est le risque que j'encours si j'achète le titre *i* ? » En effet, la *réponse dépend du portefeuille* qui est ou sera constitué.

Portefeuilles efficients, frontière efficiente et théorème de séparation

Les principaux concepts qui émergent de la théorie des choix d'investissement optimaux dans le cadre du critère E-V peuvent être facilement appréhendés à partir de graphiques et d'outils mathématiques et statistiques simples. Supposons que l'investisseur puisse, sans coûts de transaction, acheter ou vendre à découvert[1] des titres qu'il va combiner pour construire un portefeuille, qu'il évalue le risque de ce dernier par la variance de sa rentabilité et qu'il applique le critère E-V. Markowitz définit comme *efficients* (ou efficaces) les portefeuilles caractérisés par une espérance de rentabilité (notée μ ci-après) maximum à variance de rentabilité donnée (ou par une variance minimum à espérance de rentabilité donnée, sachant que cette dernière doit être supérieure à celle du portefeuille ayant la plus petite variance ; *cf.* infra). La *frontière efficiente* (ou efficace) est l'ensemble de tous les portefeuilles efficients. Pour la trouver, on résout le programme quadratique suivant, dans lequel les portefeuilles P combinent un nombre n quelconque de titres risqués :

$$\text{Min } \sigma_P^2 = \sum_i^n \sum_j^n x_i x_j \sigma_{ij}, \text{ sous les contraintes : } \sum_i^n x_i \mu_i = \mu_P \text{ et } \sum_i^n x_i = 1 \quad (1)$$

Il s'agit de trouver le vecteur des poids x_i qui minimise la variance du portefeuille, à espérance μ_P de ce dernier donnée (première contrainte, exprimant que la rentabilité espérée du portefeuille est la somme pondérée des espérances de rentabilité des titres individuels), et respectant le fait que la somme des poids des titres est égale à un (seconde contrainte). On trouve ainsi pour un μ_P donné le portefeuille (les poids x_i) de variance minimum[2], et, en faisant varier μ_P, on obtient toute la frontière efficiente.

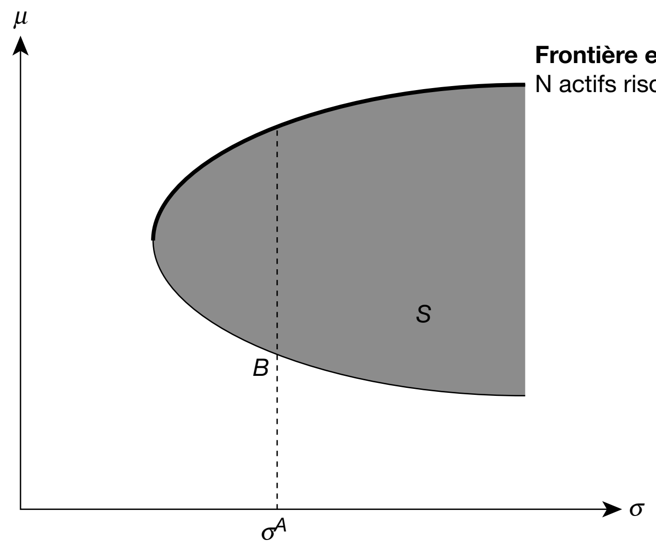
Pour des raisons à la fois graphiques et financières qui apparaîtront clairement plus loin, il est préférable en fait de raisonner dans le plan espérance-écart-type plutôt que le plan espérance-variance, le problème mathématique étant le même puisque minimiser la variance σ_P^2 revient à minimiser l'écart-type σ_P.

1. Il faut que le vendeur à découvert puisse emprunter le titre à un tiers (moyennant une commission, bien sûr) pour le vendre sur le marché sans en être propriétaire. Quand il le rachètera sur le marché pour clore sa position, il pourra le rendre à son prêteur. De même qu'un achat suivi d'une vente est une stratégie pariant sur la hausse de la valeur du titre, une vente à découvert suivie d'un rachat est une stratégie gagnante en cas de baisse du titre. Algébriquement, une vente à découvert d'un titre *i* se traduit simplement par un poids x_i négatif dans le portefeuille de l'opérateur.
2. Techniquement, on dérive le Lagrangien du programme (1) écrit sous forme matricielle par rapport au vecteur des poids.

En fait, la frontière efficiente prend deux formes différentes, selon l'absence ou la présence d'un actif sans risque, c'est-à-dire dont la rémunération est certaine pour la période d'investissement envisagée, typiquement un bon du Trésor. Il faut donc considérer deux situations.

En absence d'actif sans risque, l'ensemble des points représentatifs de tous les portefeuilles possibles dans l'espace (σ, μ) est constitué par la surface grisée *S* représentée sur la figure 28.3 et délimitée par une *hyperbole*. Cependant, seuls sont efficients les portefeuilles situés sur la branche supérieure (en rouge) de l'hyperbole (on comparera les portefeuilles A et B de même risque σ^A). Cette courbe est la *frontière efficiente* de Markowitz[1].

Figure 28.3 Frontière efficiente de Markowitz



Par une diversification appropriée (détenir vingt titres appartenant au même secteur d'activité économique est un contre-exemple flagrant, en détenir vingt de secteurs différents semble judicieux), l'investisseur peut réduire sensiblement son risque sans sacrifice de rentabilité espérée. On retrouve le bon sens de l'adage populaire : « Il ne faut pas mettre tous ses œufs dans le même panier. »

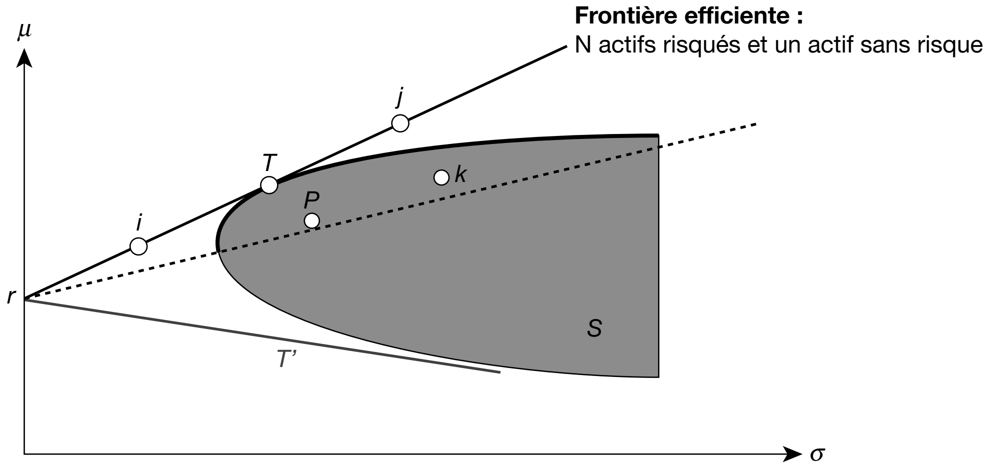
Toutefois, et selon l'autre adage suivant lequel « qui ne risque rien n'a rien », il faut accepter de prendre plus de risque (bien diversifié) pour augmenter la rentabilité attendue du portefeuille, la relation n'étant pas linéaire. Le fait qu'une augmentation d'espérance de rentabilité nécessite une prise de risque supplémentaire constitue l'un des concepts les plus importants de la finance.

1. En supposant d'une part que les titres sont infiniment divisibles et d'autre part que les ventes à découvert sont autorisées, de sorte que les poids x_i appartiennent à l'ensemble des réels, tous les points de la frontière hyperbolique sont (en théorie) atteignables.

En fonction de sa richesse initiale et de son aversion au risque, l'investisseur choisira *le* portefeuille situé sur l'hyperbole de Markowitz (tel que A sur la figure 28.3) qui conduit au meilleur compromis, de son point de vue, entre l'espérance et la variance de la rentabilité de son portefeuille[1].

Comme c'est le plus souvent le cas en pratique, il est possible, en plus d'investir dans des titres risqués, de prêter et d'emprunter au taux d'intérêt sans risque, noté *r*. Un portefeuille investi intégralement dans cet actif sans risque est représenté sur la figure 28.4 par le point d'abscisse nulle et d'ordonnée *r*.

Figure 28.4 Frontière efficiente avec un actif sans risque



Les conséquences de la présence d'un actif sans risque (avec $r \geq 0$) sont très importantes, tant sur le plan théorique qu'en pratique.[2]

D'une part, la frontière efficiente devient la *demi-droite* (en rouge sur la figure 28.4) tangente à l'hyperbole de Markowitz passant par le point *r*. *T* est *le* portefeuille efficient *tangent* et ne comprend que des actifs risqués. L'équation de cette droite est la suivante :

$$\mu_P = r + \left(\frac{\mu_T - r}{\sigma_T}\right)\sigma_P \tag{2}$$

Là encore, l'investisseur choisira *le* portefeuille unique situé sur cette demi-droite qui maximise son espérance d'utilité.

Tout portefeuille efficient peut être obtenu par combinaison de deux portefeuilles : l'actif sans risque (considéré comme un portefeuille dégénéré, sans risque) et le portefeuille tangent *T*. Si les

1. Mathématiquement, la solution est le point de tangence (unique) entre l'hyperbole et la courbe, à concavité tournée vers le haut dans l'espace (σ, μ), représentative de la fonction $f(\mu, \sigma)$ exprimant les préférences de l'investisseur.
2. Pour une démonstration rigoureuse des propositions qui suivent, consulter Portait et Poncet (2009).

poids respectifs de r et de T sont positifs, le portefeuille efficient P résultant sera situé sur le segment de droite $[r, T]$. Si le poids affecté à l'actif sans risque peut être négatif (caractérisant un emprunt), la frontière efficiente est toute la demi-droite issue du point r.

Pour les portefeuilles bien diversifiés, c'est-à-dire efficients, la relation entre rentabilité espérée et risque est donc *linéaire*, résultat justifiant par sa simplicité l'adoption de l'écart-type plutôt que de la variance comme mesure de risque.

De plus, cette frontière efficiente *domine* en tous points (sauf un, évidemment, le point de tangence T) la frontière efficiente de Markowitz puisqu'elle est située au nord-ouest de l'hyperbole dans le plan (σ, μ). Le compromis risque-rentabilité est non seulement linéaire, il est plus favorable à l'investisseur que ce que l'analyse initiale de Markowitz impliquait.

Le résultat fondamental (dû à James Tobin (1958)) selon lequel tous les portefeuilles efficients sont des combinaisons de l'actif sans risque et du portefeuille tangent est appelé « *théorème de séparation en deux fonds* » : bien que le marché propose $N+1$ titres différents (N risqués et un sans risque), tous les portefeuilles efficients se construisent à partir des mêmes deux fonds (r et T).

Les investisseurs partageant le même horizon d'investissement et les mêmes croyances quant aux espérances, variances et covariances de rentabilité (ils ont la même frontière efficiente) détiennent alors tous une combinaison du même portefeuille d'actifs risqués T et de l'actif sans risque. Seuls les poids respectifs qu'ils allouent à T et à r dans cette combinaison dépendent de leur aversion au risque et de leur richesse. Un individu peu audacieux allouera un poids faible au portefeuille d'actifs risqués T et un poids élevé à l'actif sans risque (il choisira un portefeuille tel que i sur la figure 28.4) alors qu'un investisseur plus téméraire, pour obtenir une plus grande espérance de rentabilité, affectera un poids élevé à T et un poids faible à r. Il choisira même éventuellement de s'endetter (poids négatif sur l'actif sans risque) pour investir dans T plus que sa richesse initiale et construira un portefeuille tel que j sur la figure 28.4.

Ce théorème de séparation en deux fonds dû à (Markowitz et) Tobin est très important en pratique car il est à l'origine, et justifie, l'existence des fonds mutuels (SICAV et FCP) : deux fonds quelconques mais bien gérés (dont l'un est investi intégralement dans des actifs sans risque et l'autre dans des actifs risqués très bien diversifiés) suffisent à satisfaire les exigences de tous les investisseurs ayant le même horizon d'investissement ; ces derniers se contentent de les combiner selon des poids qui dépendent de leurs richesses et aversions au risque. L'économie réalisée en pratique par les investisseurs sur leurs coûts de transaction (frais d'achat et de ventes de titres) et d'information peut ainsi être considérable (il suffit d'acheter des parts de deux fonds mutuels bien choisis). Cette économie permet de rationaliser le rôle de l'industrie de la gestion déléguée de portefeuille[1].

1. Fisher Black démontra en 1972 que le théorème de séparation en deux fonds reste valide en l'absence d'actif sans risque. Les deux fonds mutuels sont constitués de portefeuilles efficients (situés sur la frontière hyperbolique) différents. De ce fait, qu'il y ait ou non un actif sans risque, deux portefeuilles efficients quelconques suffisent pour construire n'importe quel portefeuille efficient.

La théorie du portefeuille a révolutionné la façon de concevoir la gestion de patrimoine, qu'il s'agisse d'un investisseur individuel ou d'une gestion collective (ou déléguée), et ses apports sont devenus absolument incontournables. Sur le plan pratique, cependant, sa mise en œuvre pose encore de formidables problèmes qu'il convient de ne pas sous-estimer.

D'abord, l'investisseur doit savoir résoudre le programme quadratique contraint de Markowitz, ce qui, même aujourd'hui n'est pas le cas de beaucoup d'individus.

Ensuite et surtout, pour résoudre le programme (1) de minimisation quadratique de la variance du portefeuille, sujet aux deux contraintes d'une espérance de rentabilité donnée et d'une somme des poids des titres égale à un, il faut au préalable remplir deux conditions. La première est de choisir l'ensemble des n titres sur lesquels on veut investir, et la seconde de se donner comme inputs le vecteur des espérances de rentabilité de ces titres et la matrice de leurs variances-covariances. Cette dernière exigence implique un nombre parfois considérable de paramètres inconnus à estimer (l'éventuel taux sans risque r, lui, est connu) : n espérances, n variances et $n(n-1)/2$ covariances. Ces problèmes sont examinés dans la huitième section.

Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF ou CAPM)

Les travaux de Markowitz (et de Tobin) se sont arrêtés à l'étude du comportement optimal d'un investisseur individuel. Or ce dernier intervient en fait sur un marché concurrentiel impliquant de nombreux autres investisseurs essayant eux aussi de maximiser leur espérance d'utilité et dans lequel s'établissent (en général) des prix d'équilibre, c'est-à-dire tels que la demande et l'offre soient égales, pour un titre donné, et ceci simultanément pour tous les titres existants.

La prise en compte de la multiplicité des investisseurs a abouti sous certaines hypothèses à un modèle qui exprime les rentabilités espérées d'équilibre. Ce modèle est le modèle d'équilibre (ou d'évaluation) des actifs financiers (MEDAF), traduction de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM en bref). Il a été développé dans les années 1960, sur la base des travaux de Markowitz et Tobin, par les Américains William Sharpe (1964), J. Treynor (1965) et John Lintner (1965), et le Norvégien Jan Mossin (1966). Son message central est que, pour tout actif financier pris isolément, *la relation entre risque et rentabilité espérée est croissante linéairement*, comme, on l'a vu, pour un portefeuille bien diversifié en présence d'un actif sans risque. Toutefois la mesure de risque est, on le verra, *différente* pour un titre isolé et pour un portefeuille diversifié. Le MEDAF a connu depuis de nombreuses applications, a été soumis à d'innombrables tests empiriques sur l'ensemble des marchés financiers, et reste à ce jour le paradigme dominant malgré des attaques continuelles, de nature tant théorique qu'empirique, dont nous ferons partiellement état.

Pour déterminer la relation entre rentabilité espérée et risque d'un titre financier à l'équilibre (partiel[1]) du marché résultant de l'agrégation des comportements individuels, il est supposé que tous les investisseurs se comportent conformément au critère espérance-variance et qu'il existe un actif sans risque. Par conséquent, pour chacun d'entre eux, la frontière efficiente est la demi-droite de Markowitz-Tobin. Cette hypothèse ne suffit cependant pas à caractériser l'équilibre du marché, car le portefeuille tangent *T* (de la figure 28.4) dépend de l'hyperbole qui est effectivement construite, et celle-ci dépend des inputs introduits dans le programme par l'investisseur. Il est alors commode d'adopter l'hypothèse selon laquelle les individus ont (un même horizon d'investissement et) des *anticipations homogènes*, c'est-à-dire utilisent tous, pour former leurs portefeuilles optimaux, le même vecteur des rentabilités espérées et la même matrice de variance-covariance[1].

Un résultat intermédiaire important découle de l'hypothèse d'anticipations homogènes. En présence d'un actif sans risque, il existe à l'équilibre du marché une relation linéaire entre la rentabilité espérée et le risque (mesuré par l'écart-type) *d'un portefeuille efficient* :

$$\mu_P = r + \left(\frac{\mu_M - r}{\sigma_M}\right)\sigma_P \qquad (3)$$

où *P* est un portefeuille efficient quelconque et *M* représente *le portefeuille de marché* (*market portfolio*) comprenant *tous* les actifs risqués (on peut donc, simplement, dire *le marché*).

Ce résultat découle directement de l'équation (2) de la demi-droite, illustrée sur la figure 28.4, dans laquelle on a remplacé *T* par M. En effet, puisque les anticipations sont homogènes et l'horizon d'investissement est commun, tous les investisseurs ont le même portefeuille tangent *T* d'actifs risqués. Or, à l'équilibre du marché, *tous* les actifs offerts doivent être détenus, par définition de l'équilibre. Par conséquent, *T* comprend *tous* les actifs disponibles et se confond dès lors avec *M*.

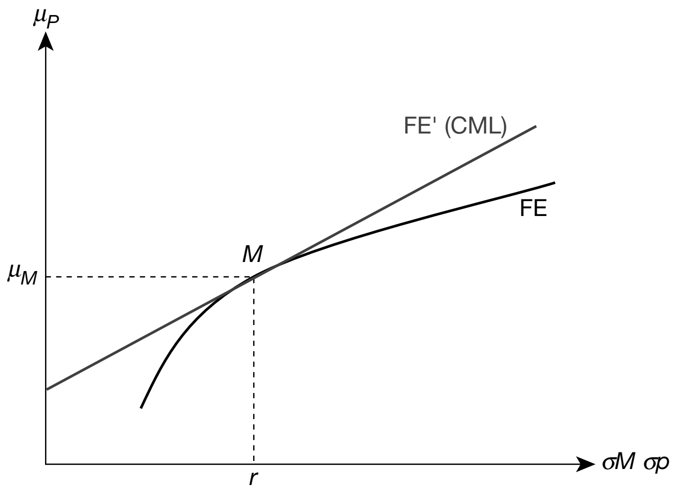
L'équation (3) représentant la frontière efficace pour des portefeuilles optimaux est représentée graphiquement par une droite appelée CML (*capital market line*) ou droite de marché des capitaux. Elle est illustrée sur la figure 28.5.

La pente de la droite (3) est appelée *prix de marché du risque* (*market price of risk*) pour un portefeuille. Ce prix est lui-même égal à la *prime de risque du marché* (*market risk premium*) offerte en moyenne au marché ($\mu_M - r$) divisée par le montant du risque supporté (σ_M). Il est important de noter que la prime *espérée ex ante* ($\mu_M - r$) doit être positive pour inciter les investisseurs (qui n'aiment pas le risque) à financer des entreprises ou des projets risqués. Cependant, du fait du caractère aléatoire de la rentabilité R_M du marché dans son ensemble, la différence ($R_M - r$) se

1. L'équilibre est partiel et non pas général parce que l'offre de titres (par les firmes) est passée sous silence et que le MEDAF résulte de conditions d'optimisation concernant la seule demande.

1. Cette hypothèse, contraire à l'intuition et même au bon sens, fut formulée pour obtenir des résultats à partir de raisonnements et de mathématiques simples. Depuis, on sait reformuler le problème de façon telle que les anticipations peuvent être hétérogènes, mais évidemment au prix d'une autre hypothèse, certes un peu moins forte. Selon cette dernière, le portefeuille de marché *M* est efficient au sens espérance-variance. Consulter Portait et Poncet (2009), chapitre 22, sur cette question délicate.

Figure 28.5 Droite de marché des capitaux (CML)



révèle souvent négative *ex post*, et parfois gravement comme à l'issue des krachs boursiers de 1929, 1987, 1989 ou 2001, sans évidemment que cela ne remette en question la validité de la théorie.

Par ailleurs, la composition du portefeuille de marché M est telle que le poids m_i de chaque titre i est égal au rapport de sa capitalisation boursière V_i sur la somme de toutes les capitalisations boursières, c'est-à-dire la valeur totale du marché :

$$m_i = \frac{V_i}{V} = \frac{V_i}{\sum_i^n V_i}\text{, de sorte que l'on retrouve } \sum_i^n m_i = 1\ .$$

Les portefeuilles des investisseurs diffèrent en fonction de la richesse et de l'aversion au risque de ces derniers, mais ils ne diffèrent *que par les poids respectifs* alloués à M et à l'actif sans risque. Ils sont donc *parfaitement (positivement) corrélés*, puisque l'actif sans risque ne joue aucun rôle dans le calcul de la corrélation.

L'équation (3), bien que très importante, n'est cependant valide que pour des portefeuilles efficients et non pour un titre pris individuel. Le MEDAF établit la relation qui doit prévaloir à l'équilibre entre le risque et la rentabilité espérée d'un *titre envisagé isolément*. Sa justification intuitive est fondée sur une observation, déjà formulée précédemment, selon laquelle la mesure correcte du risque d'un titre englobé dans un portefeuille P est $\sigma_{iP/P}$ Comme, à l'équilibre, tout portefeuille risqué est le portefeuille de marché M, on obtient directement le MEDAF en remplaçant dans l'équation (3) le risque σ_P du portefeuille efficient P par le risque $\sigma_{iM/M}$ de l'actif isolé i :

$$\mu_i = r + \left(\frac{\mu_M - r}{\sigma_M^2}\right)\sigma_{iM} \equiv r + \beta_i\left(\mu_M - r\right) \qquad (4)$$

ou encore :

$$(\mu_i - r) = \beta_i(\mu_M - r) \tag{4'}$$

La rentabilité espérée (μ_i) et le risque marginal $\left(\beta_i \equiv \sigma_{iM}/\sigma_M^2\right)$ de tout actif sont par conséquent liés par une *relation linéaire*.

La pente de la droite de régression de la rentabilité de l'actif individuel R_i sur la rentabilité du marché R_M est égale à $\sigma_{iM/^2 M}$ et est habituellement appelée β_i en économétrie. C'est la raison pour laquelle on utilise habituellement la notation « bêta » dans l'équation du MEDAF. D'après (4'), le bêta s'interprète comme la *sensibilité* de la *prime de risque* du titre aux fluctuations de la *prime de risque* du marché global. Sachant que le bêta du marché est (évidemment) égal à 1, un bêta d'un titre supérieur (respectivement, inférieur) à 1 indique un titre plus (moins) risqué que le marché. Un titre plus risqué, dans cette acception, qu'un autre titre doit avoir une rentabilité espérée plus élevée.

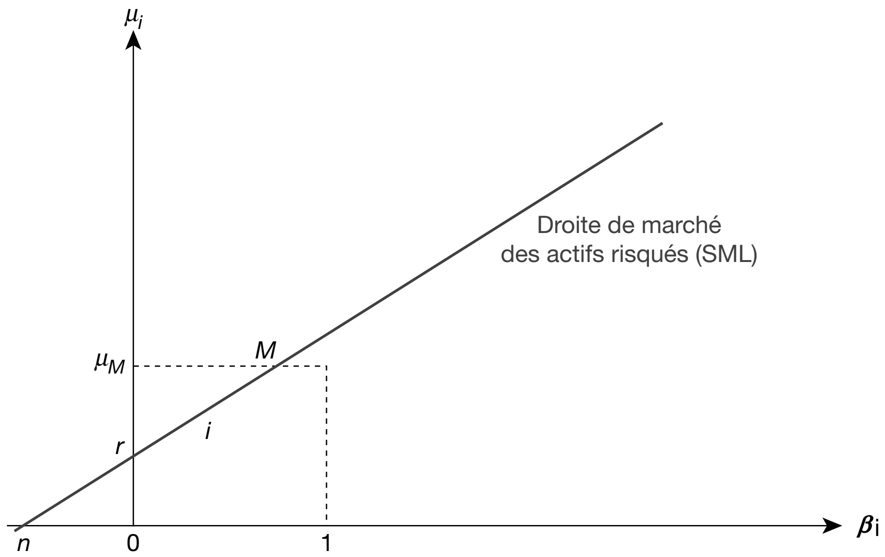
Dire que le MEDAF est un modèle de prix d'équilibre, c'est dire que les *cours actuels* des titres doivent être tels que, en moyenne, le marché rapporte μ_M et chaque titre rapporte μ_i donné par (4). La prime de risque *ex ante* offerte par le marché, ($\mu_M - r$), dépend par ailleurs, conformément à l'intuition, de l'aversion au risque moyenne des investisseurs[1]. Ceci explique pourquoi, même si le taux d'intérêt sans risque et les flux futurs de trésorerie attendus des firmes restent inchangés, les cours boursiers des titres varient si l'aversion moyenne au risque se modifie, les investisseurs devenant plus, ou moins, frileux ou audacieux.

Le graphe dans le plan $\left[\beta_i, \mu_i\right]$ de la relation (4), illustrée sur la figure 28.6, est appelé *droite de marché des actifs risqués* (*security market line*), ou plus sobrement *droite de marché*. Celle-ci passe par les 2 points de coordonnées (0, r) et (1, μ_M).

À l'équilibre, les points représentatifs de tous les titres doivent (théoriquement) être situés sur cette droite, la prime de risque ($\mu_i - r$) offerte à chaque titre étant proportionnelle à son risque mesuré par le bêta. Ce résultat explique pourquoi un actif risqué ayant une variance très élevée peut offrir une prime de risque ex ante plus faible qu'un autre titre de variance plus réduite, si sa covariance avec le marché (son bêta, donc) est plus petite. De la même façon, un actif risqué (tel que le titre n sur la figure 28.6) peut parfaitement offrir une rentabilité espérée inférieure à r, et même négative, si son bêta est négatif. En effet, dans ce cas, le titre est un « super-diversificateur » de risque puisque sa rentabilité co-varie négativement avec celle du marché. C'est le cas par exemple de l'or ou des actions de mines d'or, dont on sait que sur très longue période le taux de rentabilité est très faible. Il est ainsi à noter que la droite de marché des actifs risqués est complète (contrairement à la droite de marché des capitaux qui n'est qu'une demi-droite tronquée à gauche) puisqu'il n'y a pas de limite théorique à la valeur, positive ou négative, du bêta.

1. Cette aversion « moyenne » du marché est mathématiquement la moyenne *harmonique* des coefficients d'aversion relative à l'égard du risque des individus pondérés par leurs richesses respectives.

Figure 28.6 Le MEDAF



En plus d'être un modèle d'équilibre (partiel) répondant à la double question « à quoi sont égales les rentabilités espérées ? comment sont établis les cours d'équilibre ? », le MEDAF permet de résoudre une difficulté majeure : la mesure du risque d'un titre individuel.

En effet, on se souvient que le risque d'un titre individuel est apprécié par σ_{iP}, sa covariance avec le portefeuille *P* dans lequel il est inséré, rendant ainsi « subjective » la mesure de risque en ce sens qu'elle dépend du portefeuille de l'investisseur. Or le MEDAF fait précisément disparaître cette difficulté : le risque du titre *i* est mesuré, sans ambiguïté, par sa sensibilité β_i aux fluctuations du (portefeuille de) marché, c'est-à-dire sa covariance avec ce dernier, et cette mesure est *la même* quel que soit l'investisseur. Le risque d'un titre devient donc « objectif » en ce sens. On comprend mieux alors l'importance conceptuelle et pratique du paradigme que constitue le modèle.

LES MODÈLES À FACTEURS

Les modèles à facteurs, contrairement au MEDAF, ne sont pas des modèles d'équilibre mais des constructions statistiques *a priori*. Ces modèles permettent notamment de simplifier grandement l'estimation des covariances des rentabilités des différents titres, comme on l'explique dans la huitième section. Nous commençons par présenter succinctement le modèle à un facteur de Sharpe avant d'aborder les modèles multi-facteurs.

Le modèle à un facteur ou modèle de marché (Sharpe)

Le modèle de marché que nous présentons dans ce qui suit, peut servir de base à une meilleure compréhension du phénomène de diversification et à une justification intuitive de la relation du MEDAF. Insistons sur le fait que le modèle de marché est fondé sur une décomposition statistique *ad hoc* et n'est pas nécessaire à la validité du MEDAF, qui a un caractère plus théorique, mais il permet une explication intuitive de la théorie du portefeuille qui limite au maximum le recours à la statistique mathématique.

Le modèle de marché repose sur l'hypothèse selon laquelle l'aléa sur chaque titre est dû :

- pour partie à la conjoncture du marché global représentée par la rentabilité R_M du marché ;
- pour partie à un facteur, spécifique au titre considéré, indépendant du précédent.

On écrira alors la rentabilité R_i d'un titre i quelconque comme la somme de trois composantes :

$$R_i = \mu_i + \beta_i (R_M - \mu_M) + \varepsilon_i \; i = 1, \dots n$$

La première composante, μ_i, est une grandeur non aléatoire représentant l'espérance de R_i ; La deuxième composante, $\beta_i (R_M - \mu_M)$, exprime la réaction de la rentabilité R_i aux fluctuations du marché : quand R_M est supérieur (inférieur) à sa moyenne μ_M, R_i est majoré (minoré) d'une fraction β_i de la différence $R_M - \mu_M$ qui reflète donc l'intensité de la « covariation » de R_i et de R_M ; *il s'agit de la pente de la droite de régression de R_i sur R_M* et que l'on peut écrire : $\beta_i = \sigma_{iM/M}{}^2$.[1] Nous reconnaissons le bêta qui joue le rôle central dans le MEDAF. L'aléa représenté par $\beta_i R_M$ s'appelle *risque systématique* ou encore *risque non diversifiable*, pour des raisons expliquées plus loin.

La troisième composante ε_i représente le risque spécifique au titre i ; elle est présumée indépendante de l'indice de marché R_M et son espérance mathématique est nulle ; les différents ε_i sont en outre supposés indépendants entre eux ; ils sont appelés risques diversifiables pour des raisons qui seront éclaircies dans la suite.

De manière analogue la rentabilité du portefeuille P s'écrit aussi comme la somme de trois composantes : En effet, si x_i représente le poids du titre i dans le portefeuille P, l'on a : $R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$ et il vient :

$$R_p = (x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_n \mu_n) + (x_1 \beta_1 + \dots + x_n \beta_n)(R_M - \mu_M) + (x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n)$$

$$R_p = \mathrm{E}(R_p) + \beta_P (R_M - \mu_M) + \varepsilon_P$$

espérance aléa non diversifiable aléa diversifiable.

1. En effet, $\sigma_{iM} = \mathrm{cov}(\mu_i + \beta_i (R_M - \mu_M) + \varepsilon_i, R_M) = \beta_i \sigma^2{}_M$, d'où $\beta_i = \sigma_{iM}/{}_M{}^2$.

La première composante $(x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \ldots + x_n \mu_n)$ représente la moyenne pondérée des espérances mathématiques des rentabilités des différents titres : c'est l'espérance de rentabilité du portefeuille P, c'est-à-dire μ_P.

La deuxième composante $(x_1 \beta_1 + \ldots + x_n \beta_n)(R_M - \mu_M)$ correspond à la réaction du rendement du portefeuille P aux fluctuations du marché ; on posera $\beta_P = x_1 \beta_1 + \ldots + x_n \beta_n$ que l'on appellera, par analogie avec la terminologie adoptée pour les titres individuels, le bêta du portefeuille P. Le bêta d'un portefeuille est donc égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent.

La troisième composante $(x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \ldots + x_n \varepsilon_n = \varepsilon_P)$ est la somme pondérée des risques indépendants, spécifiques aux titres individuels.

La loi des grands nombres permet d'annuler pratiquement ce dernier risque pourvu que le portefeuille P soit bien diversifié (c'est-à-dire que n soit suffisamment grand et chaque x_i suffisamment petit). En effet, quand certains ε_i sont positifs, d'autres sont négatifs et leur somme pondérée toujours pratiquement nulle. C'est pourquoi la composante ε_i de chaque rentabilité R_i est appelée risque diversifiable car il est pratiquement éliminé dans un portefeuille bien diversifié.

En revanche, la deuxième composante, $\beta_P(R_M - \mu_M)$, ne peut pas être éliminée par la diversification et constitue le seul vrai aléa entachant la rentabilité d'un portefeuille bien diversifié.
Pour un portefeuille bien diversifié quelconque P, l'on peut donc écrire :

$$R_P \approx \mu_P + \beta_P\left(R_M - \mu_M\right)$$

Réécrivons la rentabilité d'un portefeuille (non nécessairement diversifié) sous la forme plus générale :

$$Rp = \mathrm{E}(Rp) + \beta_P\left(R_M - \mu_M\right) + \varepsilon_P \qquad (5)$$

Dès lors, en vertu de l'indépendance présumée de R_M et de ε_P et de l'additivité des variances qui en résulte, le risque total affectant R_P, $\sigma^2(R_P)$, peut être décomposé en deux :

$$\sigma^2\left(R_p\right) = \beta_P^2 \sigma^2\left(R_M\right) + \sigma^2\left(\varepsilon_P\right)$$

La première composante $\left(\beta_P^2 \sigma^2\left(R_M\right)\right)$ constitue donc le risque systématique, irréductible à la diversification, alors que la deuxième composante $(\sigma^2(\varepsilon_P))$ représente le risque diversifiable ou spécifique qui peut être, à la limite, annulé par diversification. À la lumière du modèle de marché, la relation du MEDAF paraît donc très naturelle : puisqu'un titre a vocation à être immergé dans un portefeuille bien diversifié, donc son risque diversifiable à être annulé, seul son risque systématique doit être rémunéré. De ce fait son espérance de rentabilité ne dépend que de son bêta.

Modèles multi-facteurs

Les modèles multi-facteurs généralisent le modèle de marché et s'écrivent :

$$R_i = \mu_i + \sum_{k=1}^{m} \beta_i^k F_k + \varepsilon_i \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n$$

Exemple

Considérons n titres et supposons que le modèle de marché prévaut. Supposons également que, pour tous ces titres, l'écart-type des rentabilités soit égal à 30 % et le bêta soit égal à 0,9. On suppose en outre que $\sigma(R_M)$ = 20 %. Le modèle de marché implique :

$$R_i = r + 0{,}9 \times \left(R_M - \mu_M\right) + \varepsilon_i,$$

donc $$\sigma^2\left(R_i\right) = \left(0{,}9\right)^2 \times \sigma_M^2 + \sigma^2\left(\varepsilon_i\right) = \left(0{,}3\right)^2,$$

Le risque total se décompose donc comme suit : risque total : $\sigma^2\left(R_i\right) = 0{,}09$;

risque systématique $\sigma_M^2 = \left(0{,}9\right)^2 \times$ risque spécifique $= \left(i\right) = 0{,}0576$.

Considérons maintenant un portefeuille équi-pondéré, formé des n titres précédemment décrits. Le bêta de ce portefeuille est égal à la moyenne de celui de ses composantes, soit P = 0,9, et sa rentabilité s'écrit :

$$R_p = r + 0{,}9 \times \left(R_M - \mu_M\right) + P$$

Comme ε_P et R_M sont indépendants, l'on a : $\sigma_P^2 = \mathrm{var}\left(0{,}9 \times R_M\right) + \sigma^2\left(\varepsilon_P\right)$.

Le risque spécifique lié à $\varepsilon_P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ peut se mesurer par $\sigma^2\left(\varepsilon_P\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(\varepsilon_i) = 0{,}0576/n$.

Le risque systématique peut se mesurer par $\mathrm{var}(0{,}8 \times R_m) = [0{,}9 \times 0{,}2]^2 = 0{,}0324$.

Il apparaît donc que le risque spécifique est :

- prépondérant pour un titre (n = 1) ;
- non négligeable pour un portefeuille peu diversifié (pour n = 4, en termes de variance, il représente près du quart du risque systématique dans notre exemple) ;
- négligeable en regard du risque systématique pour un portefeuille bien diversifié (pour n = 20, il est dix fois plus faible que le risque systématique, dans notre exemple).

où les β_i^k représentent les sensibilités de la rentabilité du titre i aux m facteurs communs F_k, ε_i est un bruit blanc, et où les facteurs communs F_k sont centrés et décorrélés entre eux[1].

La variance de R_i pourra alors être décomposée comme suit :

$$\sigma^2(R_i) = \sum_{k=1}^{m}(\beta_i^k)^2\sigma^2(F_k) + \sigma^2(\varepsilon_i) \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n$$

m risques systématiques risque diversifiable.

1. En général, on peut s'attendre à ce que les facteurs communs soient plus ou moins corrélés entre eux. Ceci ne pose cependant pas de problème car il est toujours possible de convertir un ensemble de facteurs corrélés en un autre ensemble de facteurs non corrélés par la décomposition de Choleski. Voir par exemple Portait et Poncet (2009), chap. 26.

Les facteurs peuvent être choisis de manière exogène (il s'agira en général de variables économiques considérées, *a priori*, comme pertinentes) ou de manière endogène par une analyse de données (analyse factorielle). Que l'on utilise la méthode endogène ou l'approche exogène, il s'agit d'expliquer du mieux possible la structure de corrélation des rentabilités des différents titres et de séparer les risques systématiques, qui sont en moyenne rémunérés, des risques diversifiables qui ne le sont pas. La méthode « exogène » est en pratique plus répandue. Typiquement, on retrouve dans les facteurs communs des éléments macro-économiques relatifs aux politiques monétaires et fiscales, à la croissance économique et au niveau des taux d'intérêt et de change, des éléments méso-économiques de type secteurs industriels, et parfois des éléments micro-économiques tirés des bilans des entreprises comme le ratio d'endettement, le taux de distribution des dividendes ou le degré de liquidité.

En outre, les modèles multi-facteurs présentent les autres avantages potentiels suivants :

- ils sont sous-tendus par une logique économique et financière, ce qui les rend crédibles et facilement compréhensibles ;
- leur mise en œuvre est relativement aisée ;
- ils sont flexibles et s'adaptent assez bien aux préférences, jugements et intuitions des utilisateurs ;
- ils prennent en compte les changements intervenus dans les caractéristiques des titres dans la mesure où des facteurs de type micro-économique sont inclus dans la liste des facteurs, comme le ratio d'endettement ou le ratio de liquidité générale de la firme ;
- le risque est décomposé en plusieurs sources, ce qui permet une analyse plus fine.

Un modèle mérite une mention particulière, celui de Fama et French (1995). Trois facteurs semblent en effet expliquer de façon satisfaisante les rentabilités constatées des actions (américaines au moins) : le *portefeuille de marché*, le *book-to-market* ratio et la *taille* (relative, mesurée par la *capitalisation boursière* relative). Le ratio *book-to-market* (valeur comptable des fonds propres sur capitalisation boursière) distingue les valeurs dites de rendement (*value stocks*) des valeurs dites de croissance (*growth stocks*). Les premières ont un ratio élevé, les secondes un ratio faible, du fait que le marché valorise les investissements futurs prévisibles de la firme. Quand ces derniers ont une valeur nette présente espérée élevée, la capitalisation boursière est forte, et le ratio *book-to-market* faible.

Selon Fama et French, l'effet *taille* traduirait des problèmes liés à la liquidité et à la qualité de l'information ; et le facteur *book-to-market* serait lié au risque de défaillance de certaines entreprises dû à leur vulnérabilité particulière aux conjonctures économiques défavorables et par conséquent refléterait la prime de risque requise par les investisseurs pour les financer. D'autres interprétations ont cependant été proposées. Quoi qu'il en soit, le modèle à trois facteurs de Fama et French est devenu populaire au point de supplanter le MEDAF dans nombre d'applications pratiques.

UN MODÈLE ALTERNATIF AU MEDAF : L'APT

Le MEDAF est un modèle intuitif et commode mais souffre du caractère très restrictif de certaines des hypothèses (fonctions d'utilité quadratiques ou taux de rentabilité gaussiens) qui le sous-tendent. S. Ross a tenté de s'en affranchir et a élaboré en 1976 un modèle alternatif appelé modèle d'évaluation par arbitrage ou *arbitrage pricing theory* (APT)[1].

Ce dernier est fondé, d'une part, sur la notion qu'un *portefeuille d'arbitrage* (sans risque et de valeur initiale nulle) ne saurait rapporter de l'argent à coup sûr et, d'autre part, sur l'intuition selon laquelle un nombre limité de *facteurs de risque systématiques communs* affecte le taux de rentabilité espéré de tous les actifs financiers. Le double objectif du modèle est d'identifier ces facteurs et d'obtenir l'équation reliant l'espérance de rentabilité d'un titre à ses sensibilités aux différentes sources communes de risque.

Le modèle, mono-périodique comme le CAPM, est fondé sur un modèle multifactoriel constituant une hypothèse purement statistique (sans fondements théoriques) :

$$R_i = r_i + \sum_{k}^{m} b_{ik} F_k + \varepsilon_i \qquad \forall_i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

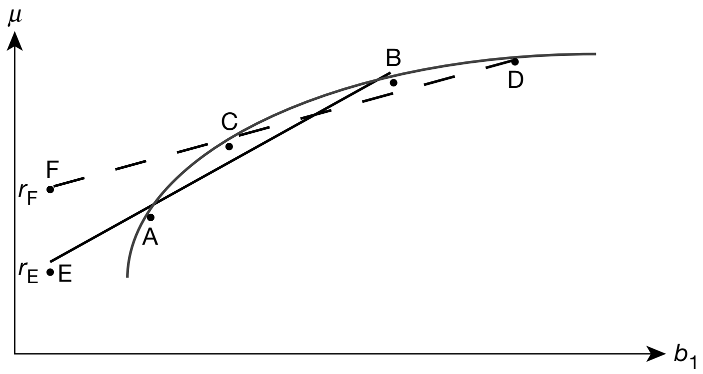
où μ_i est l'espérance de R_i, b_{ik} désigne ici la *sensibilité* de la rentabilité du titre i au facteur commun risqué k (= 1, …, m), F_k est la variation *non anticipée* du facteur k, d'espérance nulle, par conséquent, les F_k sont non corrélés entre eux, et ε_i est le risque spécifique du titre i, d'espérance nulle et de covariance nulle avec chacun des facteurs k.

Outre les hypothèses générales concernant la perfection du marché financier, le comportement des investisseurs, la possibilité d'acheter ou de vendre à découvert tous les titres dont l'offre est fixe et qui sont par ailleurs infiniment divisibles, on suppose de plus que le nombre de titres offerts n est très grand et que le nombre de facteurs communs m est petit devant n. Ces facteurs sont *a priori* arbitraires (*cf. infra*).

L'idée fondamentale sous-tendant le modèle est que, en l'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA), la relation entre l'espérance du taux de rentabilité et les risques systématiques, mesurés par les sensibilités b_{ik}, doit être *linéaire*. Pour donner l'intuition de ce résultat, supposons pour le moment qu'il n'y ait qu'une seule source de risque commune, c'est-à-dire un seul facteur (le n° 1). Supposons également qu'une relation non linéaire soit observée entre l'espérance de rentabilité des portefeuilles et leur sensibilité à ce facteur, conformément à la figure 28.7 où sont représentés les quatre portefeuilles très bien diversifiés A, B, C et D. Une combinaison linéaire appropriée des portefeuilles A (acheté) et B (vendu à découvert) permet d'obtenir le portefeuille E. Ce dernier est insensible au facteur (unique) de risque, est donc (approximativement) sans risque, et rapporte le taux r_E. Le point E est situé sur le prolongement (à gauche) du segment AB puisque E est un portefeuille obtenu par combinaison linéaire de A et B, la somme des poids faisant un.

1. C'est l'acronyme anglais qui prévaut, même dans les pays francophones.

Figure 28.7 Un seul facteur, marché permettant l'arbitrage



De la même façon, un portefeuille F, composé positivement de C et négativement de D, de telle sorte que la somme des poids soit égale à un, a une rentabilité (approximativement) sans risque égale à r_F. Il suffit alors d'acheter le portefeuille F et de vendre le portefeuille E pour réaliser, sans risque ni mise de fonds (la vente finançant l'achat), un gain d'arbitrage égal, en pourcentage, à (r_F r_E). Un tel portefeuille de valeur initiale nulle mais de valeur finale certainement positive est appelé *portefeuille d'arbitrage.*

Une telle situation est à l'évidence incompatible avec l'AOA. En fait, les arbitragistes essayant tous d'acheter le portefeuille F et de vendre le portefeuille E feront monter la valeur de F et baisser celle de E de telle sorte que le taux de rentabilité r_F baissera et le taux r_E augmentera jusqu'à leur égalité parfaite. Notons que si la concavité de la courbe ACBD était tournée vers le haut, le même type de construction de portefeuilles E' et F' aboutirait à un taux d'arbitrage positif égal à ($r_{E'}$ $r_{F'}$), ce qui est également impossible.

La seule situation possible est donc celle pour laquelle les points A, C, B et D sont alignés sur une droite du plan (b_1, μ). La droite passant par A, C, B et D est la *droite d'évaluation par arbitrage*. Elle passe par le point représentatif de l'actif sans risque de rentabilité r puisqu'un portefeuille très bien diversifié (à risque résiduel négligeable) et insensible à la seule source commune de risque est lui-même (approximativement) sans risque. L'équation de cette droite s'écrit par conséquent :

$$\mu_i = r + \lambda_1 b_{i1} \qquad \forall_i = 1, \ldots, n \qquad (3)$$

où λ_1 est la prime de risque associée au facteur 1. Notons que si l'indice i représente ici un portefeuille bien diversifié, l'équation reste valable pour un actif pris isolément : le risque spécifique de ce dernier étant éliminable par diversification, le marché ne le rémunère pas et seule compte la sensibilité de ce titre au facteur de risque commun, c'est-à-dire son risque systématique.

Si nous abandonnons maintenant l'hypothèse restrictive de l'existence d'une source commune de risque unique et considérons m sources de risque systématique, nous obtenons une relation d'évaluation par arbitrage faisant intervenir les m sensibilités b_{ik} et qui s'écrit :

$$\mu_i = r + \lambda_1 b_{i1} + \ldots + \lambda_m b_{im} = r + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_{ik} \qquad \forall_i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

où les λ_k sont les prix de marché des risques associés aux facteurs *k*.

Il est facile de montrer que l'on peut réécrire cette équation comme suit :

$$\mu_i = r + \sum_{k=1}^{m} \left(\delta_k - r\right) b_{ik} \qquad \forall_i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

où un $\lambda_k = \left(\delta_k - r\right)$ est la prime de risque associée au facteur commun *k*, c'est-à-dire l'espérance d'excès de rentabilité, par rapport au taux sans risque, procuré par le portefeuille exclusivement sensible (de façon unitaire) à la source de risque *k* et insensible à tous les autres facteurs communs $k' \neq k$.

Il est utile à ce stade de formuler les remarques suivantes :

- c'est cette version (5) de l'APT, s'appliquant aussi bien à des titres individuels qu'à des portefeuilles, qui est utilisée en pratique ;
- contrairement au MEDAF qui établit une relation exacte entre rentabilité espérée et risque, l'APT ne donne qu'une relation approximative puisque, le nombre *n* d'actifs risqués n'étant pas infini, les portefeuilles A, B, C et D ont un risque résiduel très faible mais non nul ;
- s'il n'y a empiriquement qu'un seul facteur commun justifiant d'une prime de risque non nulle, alors l'APT devient *formellement* identique au MEDAF. Le facteur commun unique peut être alors interprété comme le portefeuille de marché ;
- sur le plan opérationnel, il y a deux façons de mettre en œuvre le modèle : la méthode « endogène » qui ne fait appel qu'à des données relatives à l'univers de titres sur lequel on travaille (les facteurs communs sont alors des portefeuilles particuliers), et la méthode « exogène » qui s'appuie sur la théorie économique pour décider quels sont *a priori* les facteurs communs de risque influençant la rentabilité des titres, tels que les taux d'intérêt et de change, les politiques monétaire et fiscale, le coût de l'énergie, le PNB, les taux d'inflation et de chômage, les indices sectoriels, etc. C'est cette deuxième méthode qui est le plus utilisée.

L'utilisation majeure de l'APT concerne évidemment la sélection des portefeuilles. Selon le MEDAF, des portefeuilles bien diversifiés ayant le même bêta (mesuré par rapport à un même indice de marché) sont équivalents. Cependant, ils peuvent avoir des sensibilités très différentes aux divers facteurs communs autres que le marché. À condition d'identifier correctement ces derniers, l'APT apparaît plus riche que le MEDAF dans le sens que les investisseurs peuvent discriminer ces portefeuilles selon les objectifs de leur gestion, leurs éventuelles contraintes, et leurs anticipations[1]. C'est en cela que réside l'intérêt d'un modèle multi-dimensionnel en risque. Par

1. Les deux modèles n'en sont pas pour autant incompatibles, puisque l'un des facteurs peut être la rentabilité du portefeuille de marché.

exemple, un fonds de retraite conservateur, une SICAV majoritairement investie dans des valeurs pétrolières, ou dans des actions d'établissements financiers fortement exposés au risque de taux d'intérêt, peuvent avoir un bêta (au sens du MEDAF) identique mais correspondre à des objectifs (en termes de risque) de gestion très différents. De manière générale, la connaissance par les investisseurs des sensibilités des portefeuilles peut être utile à l'élaboration et la gestion de ces derniers. En particulier, la *gestion alternative* (dont font partie les *hedge funds*) repose partiellement sur l'estimation de ces sensibilités.

MISE EN ŒUVRE DE LA THÉORIE DU PORTEFEUILLE ET APPLICATIONS

Nous présentons d'abord les problèmes de mise en œuvre du modèle d'optimisation de Markowitz, puis la mise en œuvre et certaines applications des modèles MEDAF et APT et enfin les principales mesures de performances fondées sur le MEDAF.

Estimation des paramètres et problèmes de mise en œuvre du modèle de Markowitz

L'une des principales difficultés rencontrées en pratique dans la mise en œuvre du modèle de Markowitz ainsi que du MEDAF ou de l'APT est le nombre des paramètres à estimer : les n rentabilités espérées μ_i, les n variances σ_i^2 et les $n(n-1)/2$ covariances σ_{ij}. Par exemple, pour quatre cents titres, le nombre total de paramètres nécessaires est de 80 600, dont 79 800 covariances. Quantitativement, c'est à l'évidence le nombre des covariances qui pose le principal problème.

Estimation des variances-covariances des rentabilités

Pour réduire la dimension de ce problème, la solution la plus simple est de recourir au modèle à un facteur de William Sharpe dit modèle de marché (*cf.* **$$ p. 00 $$**). Réécrivons le processus de génération des taux de rentabilité postulé par ce modèle sous la forme suivante :

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n$$

où α_i et β_i sont des constantes propres au titre i, R_M est le taux de rentabilité aléatoire du marché financier global (le portefeuille de marché) et ε_i une perturbation aléatoire d'espérance nulle, et indépendante de la rentabilité R_M du marché et des perturbations ε_j affectant les titres. La covariance entre les taux de rentabilité de deux actifs i et j différents se simplifie alors grandement :

$$\sigma_{ij} = \mathrm{cov}\left(\alpha_i + \beta_i\, R_M,\ \alpha_j + \beta_j\, R_M\right), \text{ donc :}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j\ \mathrm{cov}\left(R_M, R_M\right) + \beta_i\ \mathrm{cov}\left(R_M, \varepsilon_j\right) + \beta_j\ \mathrm{cov}\left(R_M, \varepsilon_i\right) + \mathrm{cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$$

Et puisque, par hypothèse, toutes ces covariances sont nulles à l'exception de $\mathrm{cov}\left(R_M, R_M\right) = \sigma_M^2$, il vient :

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2 \qquad \text{pour} \quad i \neq j$$

Le problème de l'estimation des covariances est donc considérablement simplifié, puisqu'au lieu d'avoir à mesurer $n(n - 1)/2$ covariances (un nombre d'ordre $n^2/2$), il suffit d'estimer les n sensibilités β_i (à l'aide de n régressions linéaires simples) et la variance du portefeuille de marché, soit $n + 1$ variables. Pour $n = 400$, il suffit donc d'estimer 401 paramètres au lieu des 79 800 covariances du cas général !

Par ailleurs on peut estimer simplement les n variances σ_i^2 à partir de l'échantillon des réalisations des R_i.

Une solution à peine moins simple pour estimer les covariances consiste à s'appuyer sur un modèle à m facteurs :

$$R_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{m} \beta_i^k F_k + \varepsilon_i \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n$$

avec : $\mathrm{cov}(\mathrm{F}_k, \mathrm{F}_h) = \mathrm{cov}(\mathrm{F}_k, \varepsilon_i) = \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pour $i\ j$ et $k\ h$.

Ceci implique :

$$\mathrm{cov}\left(R_i, R_j\right) = \sum_{k=1}^{m} \beta_i^k \beta_j^k \sigma_{F_k}^2 \qquad \text{pour} \quad i \neq j$$

Ici, l'estimation des covariances nécessite, outre l'estimation des m variances des facteurs $\sigma_{F_k}^2$, n régressions multiples qui permettent d'estimer les β_i^k .

Il est (presque) évident que la prise en compte de plusieurs sources de risque, plutôt qu'une seule, améliore l'explication des co-variations entre les titres. Il existe cependant plusieurs problèmes, dus notamment à la stabilité des sources de risque, à la façon dont les facteurs sont construits et estimés, et aux méthodes économétriques utilisées.

Estimation des espérances de rentabilité

Contrairement à l'intuition peut-être, la tâche la plus difficile est l'estimation des n espérances de rentabilité, parce que, du moins en matière d'actions, les entreprises sont des entités mouvantes qui prennent continuellement des décisions d'investissement et de financement qui en modifient la nature. Par ailleurs, la valeur d'un titre dépend de l'offre et la demande, qui elles-mêmes dépendent de nombreux paramètres. Pour ces raisons, les estimations économétriques ne sont d'aucun secours. C'est en cette matière que le rôle des analystes financiers, spécialisés par secteurs économiques, peut s'avérer important (la finance de marché rejoint ici la finance d'entreprise). Cette appréciation des espérances de rentabilité est d'autant plus importante que l'on constate que la composition du portefeuille tangent (donc celle de tous les portefeuilles optimaux) est extrêmement sensible aux rentabilités espérées.

Positions courtes interdites

Une difficulté supplémentaire s'ajoute à celle de l'estimation des paramètres lorsque les positions courtes (à découvert) ne sont pas autorisées. Lorsque pèse cette contrainte et qu'il n'existe pas d'actif sans risque, la frontière efficiente conserve une convexité tournée vers le haut, comme dans le cas où les positions courtes sont permises, mais elle n'est plus représentée par une demi-branche d'hyperbole dans le plan (σ, μ). Elle est au contraire constituée de plusieurs arcs d'hyperbole qui se raccordent en des points singuliers représentant des « portefeuilles d'angle » (*corner portfolios*). En passant d'un portefeuille d'angle au suivant le long de la frontière efficiente, des titres entrent dans ou sortent du portefeuille optimal. Les logiciels commerciaux qui calculent les frontières efficientes donnent les compositions exactes de ces portefeuilles d'angle.

Mise en œuvre et quelques applications du MEDAF

Après une présentation succincte de quelques aspects empiriques et de la mise en œuvre du MEDAF nous décrivons quelques applications de ce modèle à l'analyse boursière et au choix des investissements.

Mise en œuvre du MEDAF

La mise en œuvre du MEDAF requiert d'abord le calcul des rentabilités-période R_{it} des différents titres i ainsi que la rentabilité R_{mt} du portefeuille de marché dans les périodes passées $(t-1, t)$. On utilise des données historiques concernant les prix et les dividendes et on calcule les rentabilités passées par la formule[1] :

$$R_{it} = (P_{it} - P_{it-1} + D_{it})/P_{it}$$

où P_{it} est le cours du titre i à la date t et le dividende D_{it} est distribué entre $(t-1)$ et t.

Pour ce qui concerne les rentabilités R_m on se fonde sur l'évolution d'un indice boursier tel qu'un CAC ou un Eurostoxx.

On estime ensuite les bêtas des différents titres, en régressant les $(R_{it} - r_t)$ sur $(R_{mt} - r_t)$. Rappelons en effet que β_i est le coefficient de cette régression. Le taux sans risque r_t est par exemple le taux du marché monétaire prévalant en $t-1$ (pour les opérations entre $t-1$ et t).

Une telle estimation pose différents types de problèmes : la fréquence des observations, la durée de la période totale d'estimation, la stabilité des distributions, donc des bêtas, les erreurs de mesure et le choix du portefeuille de marché M. Pour ce qui concerne les deux premières questions, notons que le nombre d'observations doit être suffisant (supérieur à trente) pour que l'estimation soit suffisamment fiable et, qu'en général, il est considéré préférable d'utiliser des données hebdomadaires plutôt que quotidiennes (trop bruitées).

1. Quand la fréquence des observations est élevée (données hebdomadaires ou quotidiennes), on utilise en général les rentabilités logarithmiques : $R_{it} = \ln((P_{it} + D_i)/P_{it-1})$ $i = 1, \ldots, n$ *et m.*

Il faut aussi estimer la prime de risque moyenne $\mu_m - r$. Bien qu'il s'agisse en théorie d'une prime anticipée, on la calcule généralement sur des données historiques comme la moyenne statistique de la différence observée (*ex post*) entre la rentabilité du marché et le taux sans risque. Cette moyenne empirique dépend en fait de la période de l'échantillon à partir duquel elle est calculée et est de l'ordre de 5 % à 7 %.

On calcule enfin l'espérance de rentabilité *théorique* d'un titre i quelconque à l'aide du MEDAF : $\mu_i = r + \beta_i\,[\mu_m - r]$, où r est le taux sans risque actuellement observé et β_i et $\mu_m - r$ ont été estimés comme indiqué ci-dessus.

Exemple

En moyenne, sur les vingt dernières années, la rentabilité des placements sur le CAC 40 dividendes inclus (l'estimateur de R_M), a dépassé l'EURIBOR-1an de 6 % ; on effectue, en utilisant les observations hebdomadaires des dernières années, une régression de l'excédent de rentabilité de l'action x sur celui du CAC 40 :

$$R_x(t) - r_t = a_x + \beta_x\left(R_M(t) - r_t\right) + \varepsilon(t)\,.$$

Supposons que l'estimation du coefficient β_x résultant de cette régression soit de 0,7. Aujourd'hui, le taux du 1 an est de 4 %. Pour calculer l'espérance de rentabilité, μ_x, requise aujourd'hui par le marché, on présume que la prime requise sur R_M (c'est-à-dire $\mu_M - r$) est de 6 %, comme la moyenne réalisée dans le passé. On applique ensuite le MEDAF à x pour obtenir l'espérance théorique de sa rentabilité aujourd'hui : $\mu_x = 4\,\% + 0{,}7 \times 6\,\% = 8{,}20\,\%$.

Le MEDAF et le choix des investissements financiers

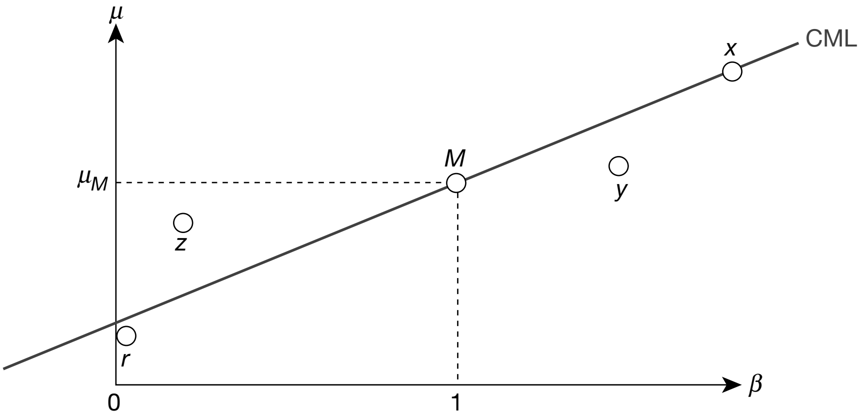
Une première application consiste à comparer la valeur théorique ou normale μ_i, donnée par le MEDAF, à une anticipation de rentabilité a_i élaborée à l'aide d'une analyse financière par exemple, afin de juger de l'opportunité d'un investissement boursier. Si a_i est supérieur à μ_i l'investissement est intéressant (l'action est sous-cotée) et le titre est surévalué autrement. Ceci revient à vérifier si le point représentatif (β_i, a_i) du titre i dans l'espace (β, μ) est situé au-dessus ou au-dessous de la droite de marché (en rouge sur la figure 8). Si le point est sur la droite de marché, alors $a_i = \mu_i$, et le prix de i est normal. Tel est le cas du point x sur la figure 28.8. Sinon, il faut acheter ou vendre le titre selon que le point représentatif correspondant est situé au-dessus de la droite de marché (point z) ou au-dessous (point y).

Le MEDAF et le choix des investissements physiques.

Ce qui précède ne s'applique pas aux seuls investissements financiers, mais concerne également les investissements productifs des entreprises en avenir incertain.

Les méthodes standard de la valeur nette présente (VNP) et du taux de rendement interne (TRI), appliquées en avenir certain, posent problème quand les flux futurs générés sont aléatoi-

Figure 28.8 Points représentatifs de différents titres et droite de marché



Exemple

Considérons l'action Y aujourd'hui cotée 200 euros, qui vient de distribuer un dividende de 6 euros et que l'on estime devoir croître de 4 % l'an. La rentabilité effectivement espérée sur le placement Y est de 7 % (4 % de plus-value en capital due à la croissance + 3 % de dividende ; *cf.* le modèle de Gordon-Shapiro).

Supposons que, ces dernières années, la rentabilité annuelle des placements actions ait dépassé de 6 % en moyenne le taux d'intérêt à 1 an (que l'on suppose aujourd'hui égal à 3 %) et que la pente de la droite de régression des rentabilités passées de Y sur celles du marché (c'est-à-dire le bêta estimé de Z) soit de 1,2.

L'espérance *normale* de rentabilité (à requérir) pour une action telle que Y (dont le bêta égal à 1,2) est : μ_Y = 3 % + 1,2 × 6 % = 10,2 % ; autrement dit, le point (1,2 ; 10,2 %) est situé sur la droite de marché, alors que le point représentatif de Y (1,2 ; 7 %) est situé en dessous. L'achat d'actions Y doit donc être déconseillé.

res. Cependant, le MEDAF permet de s'y ramener de deux façons. La première méthode est celle du *taux d'actualisation ajusté* (pour le risque), qui s'apparente à la méthode du TRI. Le modèle implicitement utilisé pour calculer le TRI d'une séquence de flux (f_0, F_1, …, F_T), où f_0 est connu et F_1… F_T sont aléatoires s'écrit :

$$\mathrm{VNP}\left(r^{*}\right) = f_0 + \sum_t \frac{E(F_t)}{(1+r^{*})^t} = 0$$

où r^* est le TRI de la chronique des espérances de flux $E(F_t)$, c'est-à-dire le taux d'actualisation qui annule la VNP. En avenir certain, la méthode du TRI consiste à considérer l'investissement rentable si et seulement si son TRI est supérieur au taux d'intérêt. En avenir incertain, connaître

4986_.book Page 823 Vendredi, 11. décembre 2009 3:46 15
> STDI FrameMaker noir

le TRI du projet et le comparer à un taux d'intérêt n'est plus suffisant : il faut tenir compte du risque β. Autrement dit, il faut positionner le projet dans le plan (β, μ), comme sur la figure 28.8 et vérifier que le projet (β, r^*) est bien situé au-dessus de la droite de marché. Si tel est le cas, alors r^* est supérieur au taux requis par le marché pour des investissements de même risque, et l'investissement peut être entrepris ; autrement, il doit être rejeté.

Une seconde méthode, que nous ne développons pas ici, est celle de *l'équivalent certain*. Elle permet de calculer la VNP d'un projet à partir de l'équivalent-certain (au sens du marché) des flux F_t qu'il génère.

Ces deux méthodes généralisent à deux dimensions (rentabilité espérée – risque) les méthodes à une dimension (rentabilité) utilisées en avenir certain. La difficulté pratique que l'on rencontre, qui peut être considérable et qu'il ne faut pas sous-estimer, consiste en l'estimation des espérances des flux $E(F_t)$ et, surtout, des covariances avec le taux de rentabilité du marché (bêta…).

Les mesures de la performance boursière

Une bonne mesure de performance requiert la comparaison d'un résultat à un risque encouru. Ce risque peut être mesuré soit par la variance (ou l'écart-type σ) soit par le bêta. Nous présentons ici deux mesures de performances très classiques : le *ratio de Sharpe* et l'*alpha de Jensen*. Le ratio de Sharpe s'appuie sur σ pour mesurer le risque (ce qui est pertinent pour un portefeuille important et diversifié) alors que l'alpha de Jensen utilise β comme mesure de risque (ce qui est pertinent pour tout titre individuel ou tout fonds destiné à faire partie de portefeuilles plus larges).

Ratio de Sharpe

Il s'agit de classer deux fonds (portefeuilles) dont l'un a une rentabilité moyenne supérieure à l'autre mais un risque (mesuré par son écart-type) également supérieur. Dans le cadre du MEDAF, la solution est suggérée par l'équation de la droite de marché des capitaux qui lie théoriquement l'espérance de rentabilité de tout portefeuille efficace P à son écart-type. Réécrivons cette équation (3) comme suit :

$$\frac{\mu_P - r}{\sigma_P} = \frac{\mu_M - r}{\sigma_M} \equiv RS$$

Selon le modèle de Markowitz et le MEDAF, tous les portefeuilles efficients doivent avoir le même ratio « prime de risque sur écart-type » appelé ratio de Sharpe (RS). Puisque ce ratio s'applique aussi au portefeuille de marché M (supposé efficient), il s'identifie au prix de marché du risque pour les portefeuilles et la pente de la droite de marché.

Cette relation théorique n'est vraie qu'*ex ante*, et pour des portefeuilles efficaces.

On peut cependant considérer un portefeuille x non nécessairement efficient. Son ratio de Sharpe *ex ante* s'écrit : $RS_x = \dfrac{\mu_x - r}{\sigma_x}$. Selon les modèles précédents RS_x RS, l'égalité ne prévalant que si x est efficient.

Par ailleurs, l'espérance et l'écart-type, étant inconnus, doivent être tous deux estimés à partir de données qui ne sont disponibles, par définition, qu'*ex post*. Pour éviter toute confusion, nous différencierons « espérance mathématique » (*ex ante*) et « moyenne » (*ex post*) et munirons du signe « ^ » une estimation empirique (par exemple $\hat{m}$ et $\hat{\sigma}$ désignerons, respectivement, la moyenne et l'écart-type constatés sur un échantillon supposé tiré d'une distribution).

En pratique, on utilise le ratio de Sharpe *ex post (ou empirique)*. La rentabilité excédentaire apparaissant au numérateur est calculée *ex post* et est donc une *moyenne constatée* et non une espérance mathématique (*ex ante*, donc inobservable) : $\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_x(t) - r_t\right)$. De même, l'écart-type au dénominateur est une *estimation*[1] élaborée à partir de données passées. Le ratio de Sharpe *ex post* du portefeuille x estimé à partir de T rentabilités passées, s'écrira donc :

$$\hat{R}S_x = \frac{\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_x(t) - r_t\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_x(t) - \hat{m}\right)^2}}, \text{ avec } \hat{m} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_x(t) - r_t\right).$$

Les ratios de Sharpe *ex post* sont en général différents pour les divers portefeuilles examinés : plus le ratio constaté est élevé, meilleure est présumée la performance du fonds.

En outre, le ratio de Sharpe permet de comparer la performance d'un fonds à celle d'un indice de référence supposé représenter le marché M (par exemple, l'indice SBF 250 pour les actions françaises). Ceci permet de savoir lesquels ont « sur-performé » (on dit aussi « battu ») le marché et lesquels se sont fait « battre ».

Bien que simple à comprendre et à mettre en œuvre, le ratio de Sharpe est entaché de graves inconvénients. Nous soulignons trois de ces inconvénients et limites.

- la validité du ratio de Sharpe repose sur le bien-fondé du paradigme espérance-variance. En particulier, si les distributions de rentabilité ne sont pas symétriques, et que les investisseurs y sont sensibles (préférence pour une asymétrie à droite), le RS n'est pas une mesure de performance satisfaisante ;

1. Une légère difficulté survient quand le taux sans risque varie au cours du temps. Afin d'éviter des erreurs de spécification, il est alors nécessaire de mener les calculs non pas à partir des taux de rentabilité r_p mais directement à partir des rentabilités excédentaires (primes de risque) $r_p - r$.

- lorsque les primes de risque sont négatives (ce qui ne peut pas être vrai *ex ante* mais arrive souvent *ex post*), la comparaison des RS des fonds n'a pas de sens ;
- le plus souvent, la gestion se réfère explicitement à un *benchmark* (étalon), c'est-à-dire un indice ou un portefeuille (de titres ou d'indices) dont le gérant est censé reproduire la performance et, si possible, l'améliorer.

L'alpha de Jensen

La mesure pertinente du risque pour la richesse totale d'un investisseur est l'écart-type de sa rentabilité. Le ratio de Sharpe est donc indiqué quand il s'applique à un portefeuille bien diversifié représentant l'essentiel de la fortune de l'individu. En revanche, quand il s'agit d'un titre ou d'un portefeuille ou fond (plus ou moins bien diversifié) ne constituant qu'une partie de la richesse de l'investisseur, la mesure de risque pertinente est le bêta.

La mesure de Jensen mesure la capacité du gérant du fonds analysé à sélectionner les titres qui afficheront une rentabilité « anormalement » élevée en regard de leur bêta et à délaisser (voire vendre à découvert) les autres. Cette capacité est dite de *security picking*. L'alpha de Jensen mesure la différence entre l'espérance de rentabilité effective du portefeuille et son espérance de rentabilité théorique telle qu'elle est donnée par le MEDAF. *Ex ante*, il est formellement défini par :

$$\alpha_P \equiv \mu_P - r - \beta_P\left(\mu_M - r\right)$$

Là encore, on peut distinguer la mesure *ex ante* (définie à partir de paramètres inobservables comme dans l'équation précédente) de la mesure *ex post* ou empirique calculée à partir de réalisations passées et distinguée de la première à l'aide du signe « ^ ».

$$\hat{\alpha}_P = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_P(t) - r_t\right) - \hat{\beta}_P\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_M(t) - r_t\right).$$

où $\hat{\beta}_P$ est le coefficient de la régression de $R_P - r$ sur $R_M - r$.

Il est clair que si le gestionnaire n'a aucune capacité particulière d'analyse et de décision, l'alpha *ex ante* de son portefeuille sera nul. C'est ce que l'on devrait aussi constater en moyenne (avant coûts de transaction) *ex post*. Si α est, en revanche, positif (respectivement, négatif), le gestionnaire aura sur- (sous-)performé par rapport à l'indice M retenu comme portefeuille de marché. C'est le cas du fonds A sur la figure 28.9.

Figure 28.9 L'alpha de Jensen

PAS DE FIGURE 28.9 STDI

En fait, le MEDAF implique que, dans le plan (bêta, espérance de rentabilité), le point représentatif du portefeuille devrait, normalement se trouver sur la *droite de marché* (SML). S'il ne s'y trouve pas, l'écart vertical entre ce point et sa projection sur la SML est l'alpha du portefeuille.

Remarquons pour conclure que le ratio de Sharpe et l'alpha de Jensen ne donnent pas en général le même classement entre les fonds, notamment parce que le risque diversifiable est pris en compte dans le RS (il est incorporé dans le σ) et ne l'est pas dans l'alpha de Jensen (le bêta ne mesure que le risque systématique).

CE QU'IL FAUT RETENIR

1. La théorie classique du portefeuille s'appuie sur le paradigme espérance-variance : le risque d'un portefeuille est apprécié par la variance de sa rentabilité ; l'investisseur souhaite obtenir l'espérance de rentabilité la plus forte au prix de la variance la plus faible.
2. Les portefeuilles efficients sont ceux qui maximisent l'espérance de rentabilité pour une variance donnée.
3. Par l'effet de diversification, la variance de la rentabilité d'un portefeuille est inférieure à la moyenne des variances des rentabilités de ses constituants ; la variance de la rentabilité d'un portefeuille est liée à la covariance (corrélation) de ses composants.
4. La contribution d'un titre au risque d'un portefeuille est proportionnelle à la covariance de sa rentabilité avec celle de la rentabilité du portefeuille.
5. Tous les portefeuilles efficients s'obtiennent en combinant les deux mêmes fonds : l'actif sans risque et le portefeuille tangent (séparation en deux fonds). Le poids affecté à l'un et à l'autre de ces deux fonds dépend de l'aversion au risque de l'investisseur.
6. Le bêta d'un titre i exprime sa sensibilité au marché M. Plus précisément, il est égal à la pente de la droite de régression de R_i sur R_M c'est-à-dire à cov(R_i, R_M)/variance(R_M). C'est le bêta qui est la source du risque non diversifiable (ou systématique).
7. D'après le MEDAF, l'espérance de rentabilité d'un titre croît linéairement avec son bêta :
$$E(R_i) = \text{Taux sans risque} + \text{Bêta de } i \times (E(R_M) - \text{Taux sans risque}).$$
8. L'APT, modèle concurrent du MEDAF, exprime l'espérance de rentabilité d'un titre comme une combinaison linéaire de différents bêtas. Chaque bêta exprime la sensibilité à un facteur de risque systématique (qui n'est pas nécessairement unidimensionnel).
9. Le MEDAF, et éventuellement l'APT, sont utilisables par les entreprises pour évaluer leurs projets d'investissement, considérés alors comme des titres financiers.
10. Les performances de deux portefeuilles ne peuvent être comparées sur la seule base de leurs résultats moyens sans prendre en compte leur risque.
11. La performance d'un portefeuille P bien diversifié peut être mesurée par son ratio de Sharpe qui est défini comme le rapport : (E(R_P) – taux sans risque)/écart-type de R_P ; les portefeuilles bien diversifiés peuvent être comparés sur la base de leur ratio de Sharpe. La performance d'un titre ou d'un portefeuille x imparfaitement diversifié, ayant vocation à être immergé dans un portefeuille plus large, peut être définie par l'alpha de Jensen.

BIBLIOGRAPHIE DE RÉFÉRENCE

BERNSTEIN P.L., *Capital Ideas ; The Improbable Origins of Modern Wall Street*, The Free Press, a Division of Macmillan, Inc., 1992. Traduit en français sous le titre *Des idées capitales*, PUF, coll. « Finance », 1995.

BLACK F., « Equilibrium with Restricted Borrowing », *Journal of Business*, 45, 1972.

FAMA E.F., FRENCH K.R., « Size and Book-to-Market Factors in Earnings and Returns », *Journal of Finance*, 50, 1995.

LINTNER J., « The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolio and Capital Budgets », *Review of Economics and Statistics*, 47, 1965.

MARKOWITZ H., « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, 7(1), 1952.

MARKOWITZ H., *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, 1959.

MOSSIN J., « Equilibrium in a Capital Asset Market », *Econometrica*, 1966.

PORTAIT R., PONCET P., *Finance de marché*, Dalloz, 2e éd., 2009.

ROSS S., « The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing », *Journal of Economic Theory*, vol. 13, 1976.

SHARPE W., « Capital Asset Pricing : a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *Journal of Finance*, 19, 1964.

TOBIN J., « Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk », *Review of Economic Studie*, 1958.

NEUMANN J. VON, MORGENSTERN O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.