Le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers (MEDAF)

Philippe Bernard

Ingénierie Economique et Financière

Université Paris-Dauphine

Novembre 2007

FIG. 1 – Harry Markowitz (1927-), Prix Nobel d'économie 1990

La théorie du portefeuille s'élabora en une dizaine d'années de 1952, date de l'article fondateur de Markowitz, à 1964, date de celui de Sharpe [Sha64], avec entre les deux le livre de Markowitz [Mar59] et l'article de Tobin [Tob58]. Entre ces différentes contributions, la perspective de la théorie des portefeuilles évolua considérablement : initialement, discipline uniquement normative ([Mar52], [Mar59]), elle devint avec Tobin [Tob58] et surtout Sharpe [Sha64] (puis [Sha70]) une théorie positive de l'équilibre 'du marché financier'.

Dans l'approche de Markowitz, les différents actifs et portefeuilles sont repérés par leurs couples (rendement moyen, risque) où le risque est supposé mesuré par la variance. Le problème de chaque financier est donc de chercher le portefeuille maximisant son utilité.

Pour résoudre ce problème, il est souvent plus habile de le résoudre en deux étapes (résumées sur la figure 2) :

1. déterminer la *frontière des portefeuilles efficients*, i.e. l'ensemble des portefeuilles minimisant les risques à rendement moyen donné ; ceci nous donne un morceau de courbe croissante dans l'espace (variance du rendement,espérance du rendement) ;
2. déterminer le point de la frontière maximisant l'utilité ; les courbes d'indifférence étant convexes et croissantes, l'optimum est un point de la frontière où celle-ci est tangente à une courbe d'indifférence.

Tobin [Tob58] puis Sharpe [Sha64] ont étendu la théorie du portefeuille de Markowitz :

– en supposant l'existence d'un actif sans risque ;
– en transformant la théorie du portefeuille en une théorie positive.

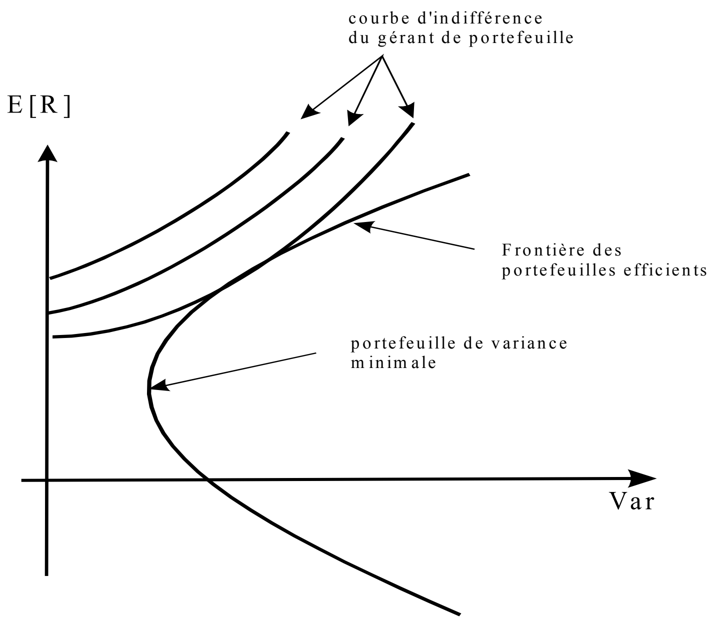


FIG. 2 – La détermination du portefeuille optimale sur la frontière des portefeuilles efficients

Si Tobin s'est contenté d'appliquer la théorie du portefeuille à la demande de monnaie, Sharpe[1] en a fait le socle d'une théorie de l'équilibre financier, le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers (MEDAF ou en anglais CAPM), sous trois hypothèses supplémentaires :

- les marchés financiers sont parfaits au sens où les agents peuvent prêter et emprunter en l'absence de toute contrainte quantitative ;
- les marchés financiers sont parfaitement concurrentiels ;
- les agents ont les mêmes anticipations sur les rendements[2].

Comme l'a noté Brennan [Bre89] :

"The reason for delay [between Markowitz (1959) and Sharpe (1964)] was

[1]Et aussi Lintner [Lin65], Mossin [Mos66]. Le modèle de Mossin est sans doute le plus remarquable des trois par sa limpidité. Aussi est-il quelque peu injuste que Sharpe est monopolisé l'attention alors que comme le notait (avec un brin de perfidie) Jan Mossin : "The paper by Sharpe gives a verbal diagrammatical discussion of the determination of asset prices in quasi-dynamic terms. His general description of the character of the market is similar to the one presented here, however, and his main conclusions are certainly consistent with ours. *But his lack of precision in the specification of equilibrium conditions leaves parts of his arguments somewhat indefinite* (souligné par nous)." ([Mos66] p.769)

[2]Sharpe attribue le terme d'homogénéité des anticipations à un des référés de son article. Bien que concédant 'l'irréalisme' de cette hypothèse, il la justifiait par sa conséquence, la réalisation de l'équilibre.

undoubtedly the boldness of the assumption required for progress, namely that all investors hold the same beliefs about the joint distribution of a security." ([Bre89] p.93)

Un des principaux résultats du CAPM fut de donner une expression exacte (et linéaire) de la prime de risque des actifs reposant sur la prise en compte des possibilités de diversification :

> "The older view that the risk premium depended on the asset's variance was no longer appropriate, since if one asset had a higher covariance with the market, it would have a higher risk premium even if the total variance of returns were lower. Even more surprising was the implication that a risky asset that was uncorrelated with the market would have no risk premium and would be expected to have the same return as the riskless asset, and that assets that were inversely correlated with the market would actually have expected returns of less than the riskless rate equilibrium." ([Ros89] p.327)

Les premiers tests rigoureux du MEDAF, au début des années 70, ont à la fois illustré le pouvoir explicatif important de ce modèle mais aussi la présence de certaines anomalies. Aussi, pour rendre compte de celles-ci dans un cadre préservant les principaux résultats du MEDAF, une première extension de celui-ci fut présentée par Black : le modèle du zéro-beta.

1 Le cadre

Le cadre du MEDAF est celui du théorème des deux fonds :

- le modèle est statique (et comprend donc uniquement deux périodes) ;
- les préférences des agents sont supposées pouvoir être définies dans l'espace variance / espérance ;
- les rendements espérés et la matrice de covariance des différents titres risqués peuvent
- les agents peuvent emprunter ou prêter un actif certain sur un marché parfait.

Dans l'économie, existent donc I agents (ménages) indicés $i = 1, ..., I$. Chaque agent est défini par sa richesse initiale W_i et par ses préférences résumées par la fonction d'utilité

U_i définie sur la richesse terminale $\widetilde{W}_i$:

$$U_i = U_i\left(\mathbf{E}\widetilde{W}_i, \sigma^2_{\widetilde{W}}\right) \tag{1}$$

Comme le modèle est un modèle d'équilibre, on ne se contente pas cependant de spécifier le côté demande du marché (les ménages) mais aussi l'offre. Les marchés financiers comprennent deux compartiments : la bourse et le marché de l'actif certain.

Sur le marché boursier sont cotés les différents titres risqués $j = 1, ..., J$ dont les rendements espérés sont toujours notés $\overline{R}_j$. Pour simplifier, on supposera que chaque titre j est l'action émise par l'entreprise j et que celle-ci n'émet aucun autre titre.[3] Comme le MEDAF est un modèle de court-terme, la quantité de titres émise par chaque entreprise est supposée constante et normée à 1. Chaque agent i détermine donc pour chaque actif j la part θ_j^i du capital de l'entreprise j qu'il souhaite détenir.

Remarque 1 *Comme dans la théorie (classique) du portefeuille, les ventes à découvert étant supposées possibles, θ_j^i peut être négatif. Il n'existe aucune contrainte sur la valeur que peut a priori prendre θ_j^i.*

La somme des demandes du titre j étant $\sum_{i=1}^{I} \theta_j^i$, l'offre globale étant 1 (par convention), la condition d'équilibre du marché de chaque titre émis par l'entreprise j est donc :

$$\sum_{i=1}^{I} \theta_j^i = 1 \tag{2}$$

Le prix du titre j est noté q_j. En raison de la normalisation du titre et de l'hypothèse que les actions sont les seuls titres émis par les entreprises, ce prix q_j est en même temps la valeur boursière de l'entreprise j. La condition d'équilibre peut donc être réécrite en valeur en utilisant ce prix q_j. La valeur demandée par l'ensemble des ménages doit donc alors être égale à la capitalisation boursière des ménages :

$$\sum_{i=1}^{I} q_j \theta_j^i = q_j \tag{3}$$

[3] Ce dernier résultat étant sans perte de généralité dans le cadre choisi puisque la politique financière y est neutre. Le théorème de Modigliani-Miller s'applique donc et le coût de financement des investissements est indépendant de la structure du capital de l'entreprise. Supposer que celle-ci est à 100% composée par des fonds propres est donc sans conséquence.

Le marché boursier est alors défini par les différentes capitalisations $(q_j)_{j=1,...,J}$ ou encore par la donnée de la valeur du marché et par sa structure. La valeur boursière du marché est simplement $\sum_{j=1}^{J} q_j$ et la structure du marché est donnée par les parts θ_j^M des différents titres dans la valeur du marché :

$$\theta_j^M = \frac{q_j}{\sum_{j=1}^{J} q_j} \tag{4}$$

Le vecteur $\theta^M = \left(\theta_1^M, ..., \theta_j^M, ..., \theta_J^M\right)$ est résume non seulement la structure du marché mais aussi constitue un portefeuille financier puisque :

$$\sum_{j=1}^{J} \theta_j^M = 1 \tag{5}$$

La structure de ce portefeuille étant celle du marché, il constitue le **portefeuille de marché**.

Remarque 2 *La propriété essentielle de ce portefeuille est d'être définie par l'ensemble des opportunités d'investissement existant dans l'économie. Dans le MEDAF traditionnel, celles-ci se limitent aux titres émis en bourse. Ceci suppose l'absence d'actifs non transférables (par exemple du capital humain) et qu'une complète 'equitization' des investissements puissent être réalisée (* GROSSMAN [1995] *[Gro95]), i.e. que les risques attachés à ces investissements puissent être partagés à l'aide d'actions ou de titres de participation.*

Sur le marché de l'actif certain ne sont présents que les ménages dans le cadre du MEDAF.[4] Chaque agent i détermine le montant B^i qu'il désire prêter (ou emprunter si $B^i < 0$) au taux d'intérêt r ou pour le rendement brut $R_0 = 1 + r$. L'épargne net des ménages étant égale à $\sum_{i=1}^{I} B^i$ et la demande des autres agents (entreprises, etc...) étant supposée nulle, la condition d'équilibre d'égalité de l'offre à la demande est :

$$\sum_{i=1}^{I} B^i = 0 \tag{6}$$

Au niveau de chaque agent i, la contrainte budgétaire de l'agent est donc :

$$\sum_{j=1}^{J} q_j \theta_j^i + B^i = W^i \tag{7}$$

[4] Même si on pourrait au prix de certaines complications y introduire tous les agents présents dans la réalité (entreprises, Etat et collectivités publiques, extérieur).

ou encore en utilisant comme instruments les parts investies $\left(x_j^i\right)_{j=0}^J$:

$$x_j^i = \frac{q_j \theta_j^i}{W^i},\ j = 1, ..., J \tag{8}$$

$$x_0^i = \frac{B^i}{W^i} = 1 - \sum_{j=1}^J x_j^i \tag{9}$$

La richesse terminale s'écrit :

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^i &= W^i \left[x_0^i R_0 + \sum_{j=1}^J x_j^i \overline{R}_j \right] \\ &= W^i \left[R_0 + \sum_{j=1}^J x_j^i \left(\overline{R}_j - R_0 \right) \right] \end{aligned}$$

ou encore :

$$\widetilde{W}^i = B^i R_0 + \sum_{j=1}^J q_j \theta_j^i \left(\overline{R}_j - R_0 \right)$$

Le rendement certain R_0, le vecteur des rendements espérés $\overline{\mathbf{R}} = \left[\overline{R}_1, ..., \overline{R}_J\right]$, la matrice de covariance $\boldsymbol{\sigma}$ définissent un équilibre si les choix des agents $\left(\theta_1^i, ..., \theta_J^i, B^i\right)_{i=1}^I$ maximisent l'utilité espérée sous les différentes contraintes budgétaires et vérifient les conditions d'équilibre du marché.

Dans ce cadre, caractériser l'équilibre revient à déterminer :

– la structure du portefeuille détenu à l'équilibre par chaque agent ;

– la prime de risque d'équilibre des différents actifs $j = 1, ..., J$.

2 La prime de risque d'équilibre

Le cadre du MEDAF est celui du théorème des deux fonds. Par conséquent, ce résultat s'applique à ce contexte : à l'équilibre, tous les agents détiennent donc une position nette en actifs certains qui est combiné à un portefeuille d'actifs risqués $z = (z_1, ..., z_J)$ - $\sum_{j=1}^J z_j = 1$. Mais quelle est précisément la structure de ce portefeuille commun z qui est détenu (en proportion variable) par tous les agents ?

Les contraintes d'équilibre permettent de répondre précisément à cette question. En effet, la condition d'équilibre (en valeur) :

$$\sum_{i=1}^I q_j \theta_j^i = q_j$$

se réécrit en fonction de la distribution de la richesse W^i :

$$\sum_{i=1}^{I} x_j^i W^i = q_j$$

Le théorème des deux fonds impose que la part de l'actif i est donnée par la part non investie en actifs certains $(1 - x_0^i)$ et par la structure du portefeuille risqué z :

$$x_j^i = (1 - x_0^i) z_j$$

Aussi après substitutions, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{I} (1 - x_0^i) z_j W^i = q_j$$

ou encore :

$$z_j \times \left[\sum_{i=1}^{I} (1 - x_0^i) W^i \right] = q_j \tag{10}$$

Si l'on fait la somme sur j de cette équation on a :

$$\left[\sum_{i=1}^{I} (1 - x_0^i) W^i \right] \sum_{j=1}^{J} z_j = \sum_{j=1}^{J} q_j$$

Aussi comme $\sum_{j=1}^{J} z_j = 1$, le terme de gauche n'est jamais **à l'équilibre** que la valeur du marché boursier. En reprenant l'équation (10) on a donc que la valeur de z_j est donc à l'équilibre :

$$z_j = \frac{q_j}{\sum_{j=1}^{J} q_j}$$

Mais le portefeuille commun z est donc simplement le portefeuille de marché puisque d'après (4) :

$$z_j = \theta_j^M$$

Le message du théorème des deux fonds est donc à la fois simple et très fort : la stratégie optimale de tout agent dans son cadre est simplement de se construire un portefeuille risqué qui soit exactement similaire au portefeuille de marché quelle que soit sa richesse, quelle que soit son aversion à l'égard du risque, etc. Ces différentes caractéristiques n'interviennent en fait qu'au niveau du choix de la pondération x_0^i, i.e. au niveau de la distribution de la richesse initiale entre les placements risqués et les placements sans risque.

Le portefeuille risqué optimal, invariant au rendement global exigé, est donc le *portefeuille de marché*. On note $\overline{R}_m$ et σ_m^2 son espérance de rendement et sa variance. Supposons sans perte de généralité que ce portefeuille puisse être acheté directement sur le marché et constitue l'actif $J+1$ (parfois également indicé simplement m). Le problème devient alors :

$$\begin{cases} \min_{(x_j)_{j=1}^{J+1}} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J+1}\sum_{k=1}^{J+1} x_j x_k \sigma_{jk} \\ \text{sous la contrainte :} \\ R_0 + \sum_{j=1}^{J+1} x_j.(\overline{R}_j - R_0) \geq \widehat{R} \end{cases}$$

Les conditions de premier ordre caractérisant cette solution est :

$$x_j.\sigma_j^2 + \sum_{k \neq j,0} x_k.\sigma_{jk} - \lambda\left(\overline{R}_j - R_0\right) = 0$$

Comme l'introduction du portefeuille de marché sous forme de titres ne modifie pas l'ensemble de choix des agents, le choix optimal est toujours d'investir $1 - x_0$ dans le portefeuille de marché. Par conséquent, une des solutions optimales est $x_j = 0$ si $j \neq J+1$. Les conditions de premier ordre se réécrivent (en utilisant directement l'indice m pour l'actif $J+1$) :

$$\begin{aligned} x_m \sigma_{jm} &= \lambda\left(\overline{R}_j - R_0\right),\ j = 1, ..., J \\ x_m.\sigma_m^2 &= \lambda\left(\overline{R}_m - R_0\right) \end{aligned}$$

En faisant le rapport entre les différentes lignes pour éliminer λ, on obtient donc :

$$\frac{\overline{R}_j - R_0}{\overline{R}_m - R_0} = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2} \tag{11}$$

Après réarrangement, on obtient donc les primes de risque des deux actifs risqués :

$$\overline{R}_j - R_0 = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}\left[\overline{R}_m - R_0\right] \tag{12}$$

ou encore :

$$\overline{R}_j - R_0 = \beta_j\left[\overline{R}_m - R_0\right] \tag{13}$$

avec :

$$\beta_j = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2} \tag{14}$$

Cette prime de risque est remarquable car le rendement excédentaire de chaque titre j apparaît seulement déterminé par deux variables :

– une variable commune, le rendement excédentaire du marché $\overline{R}_m - R_0$, qui doit être nécessairement positif pour que les agents acceptent de prendre une position nette risquée positive ;
– une variable spécifique à chaque titre, β_j, son beta, lequel mesure ce que l'on appelle le risque systématique du titre, i.e. le risque créé par le fait que le rendement du titre suive (plus ou moins étroitement) les évolutions aléatoires du rendement du marché.

De l'expression de la prime de risque, plusieurs conséquences immédiates mais non nécessairement triviales sont obtenues.

Les rendements moyens des titres risqués seront supérieurs au rendement sans risque si et seulement les rendements de ces titres sont exposés au risque de marché, i.e. si $\sigma_{jm} > 0$. Acheter un tel titre accroît donc l'exposition au risque de marché. Pour que les agents acceptent d'investir dans ce titre, il est donc nécessaire que son rendement espéré compense le risque supplémentaire qu'il induit :

$$\sigma_{jm} > 0 \Rightarrow \overline{R}_j > R_0$$

Si un actif risqué j évolue en sens contraire du marché, $\sigma_{jm} < 0$, il constitue un actif permettant de se protéger contre les fluctuations du marché. Aussi, les agents accepteront de le détenir même si son rendement espéré est inférieur au rendement sans risque :

$$\sigma_{jm} < 0 \Rightarrow \overline{R}_j < R_0$$

Enfin, si un actif risqué n'est aucune corrélé aux fluctuations du marché, alors son rendement espéré est égal au rendement sans risque : en effet, même s'il est risqué, son risque étant indépendant du risque de marché, il peut être diversifier. Aussi :

$$\sigma_{jm} = 0 \Rightarrow \overline{R}_j = R_0$$

En fait, le fait de combiner deux portefeuilles impliquent que les agents opèrent dans l'espace écart-type - espérance sur une droite, appelée droite de marché. En effet, la variance du portefeuille sélectionné est $(1 - x_0)^2 \sigma_m^2$ alors que son rendement espéré est

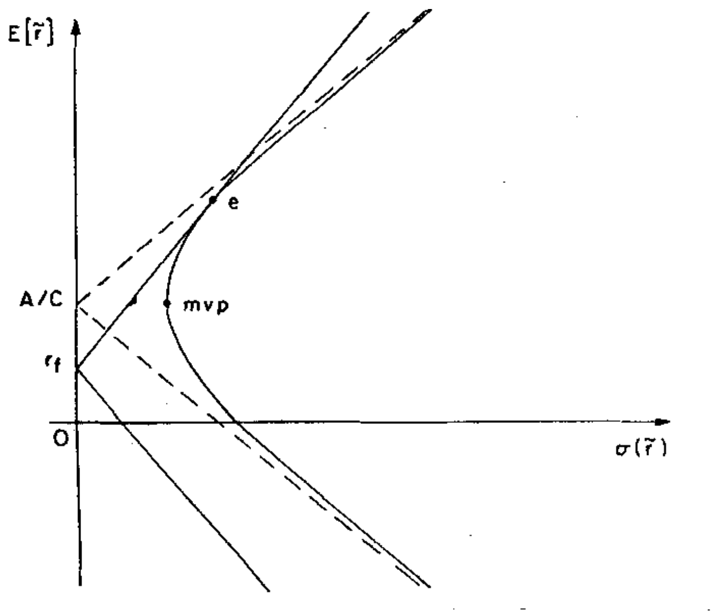


FIG. 3 – La frontière des portefeuilles efficaces lorsque $R_0 < A/C$

$x_0 R_0 + (1-x_0)\overline{R}_m$. Si ce rendement est égal au rendement exigé, on a donc :

$$\begin{aligned}\overline{R} &= x_0 R_0 + (1-x_0)\overline{R}_m \\ &= R_0 + (1-x_0)\left(\overline{R}_m - R_0\right) \\ &= R_0 + \frac{\sigma_p}{\sigma_m}\left(\overline{R}_m - R_0\right)\end{aligned}$$

puisque :

$$\sigma_p^2 = (1-x_0)^2\,\sigma_m^2$$

Par conséquent en réarrangeant on obtient :

$$\frac{\overline{R} - R_0}{\sigma_p} = \frac{\overline{R}_m - R_0}{\sigma_m}$$

Cette équation implique que les choix optimaux sont sur la droite reliant l'actif sans risque au portefeuille de marché dans l'espace écart type - espérance des rendements, comme le montre la figure 3.

Les rendements des portefeuilles sont donc situés sur une droite et dépendent uniquement du β de l'actif considéré. Plus le rendement de l'actif est corrélé avec la consommation, plus l'actif est donc sensible au cycle économique, plus le β de l'actif est grand ainsi que sa prime de risque. La morale de cette relation est donc celle tirée par Fischer Black :

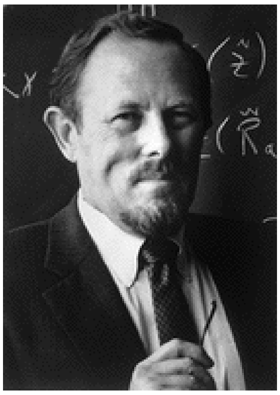


FIG. 4 – William Sharpe (1934-), Prix Nobel d'économie 1990

"Pour obtenir des gains attendus plus élevés, vous devez prendre davantage de risque. Si vous voulez escalader une haute montagne, vous devez être préparé à souffrir." ([Bla88], cité par [Ber95] p.210)

3 Le MEDAF à l'épreuve des faits

Dès le début des années 70, de nombreuses études ont confronté le CAPM aux données empiriques. Les résultats encourageants de ces premières études ont énormément contribué à imposer le CAPM comme le modèle de référence en finance de marché. Cependant, progressivement, les critiques adressées aux méthodes empiriques utilisées (Roll [Rol77]), la découverte de certaines anomalies, notamment l'effet de taille (Banz [Ban81]) ont progressivement fait naitre le doute sur la validité du CAPM. Le paroxisme du doute a sans dote été atteint lorsque les résultats de Fama & French [FF92] ont même semblé le rejeter complètement. Paradoxalement, la critique de Fama & French semble avoir été salutaire puisque les critiques de la critique ont souligné la capacité du CAPM d'expliquer une part importance de la variabilité des rendements dès lors que l'on prend en compte certains facteurs ignorés dans les travaux antérieurs.

3.1 Quelques faits stylisés

L'expérience historique des U.S.A sur la période 1926-91 exhibe quelques faits stylisés propres aux économies de marché :

– les rendements moyens (historiques) sont très hétérogènes ; ainsi, si le rendement moyen des bonds est de seulement 3.6%, celui de l'indice S&P 500 est de 11.9% (tableau 1) ; la performance des petites entreprises est encore plus impressionnante (+16.1%) ; la prime de risque sur l'indice S&P 500 est donc 8.2% ;[5]
– les actifs les plus rentables sont aussi les plus volatiles ; ainsi, la volatilité de la valeur boursière des petites entreprises est trente fois plus importantes que celle des bills (31.02% contre 0.94%) ;
– enfin, les performances ne sont pas stables au cours du temps et connaissent même parfois de fortes évolutions ; ainsi, si l'on compare les sous-périodes $1926-75$ et $1981-91$, on observe une forte augmentation sur la dernière période du rendement des bills (de 2.30% à 7.98%) et donc une réduction drastique de la prime de risque ; la volatilité des titres privés est-elle aussi historiquement très variable ; ainsi, elle est par exemple pratiquement divisée par deux pour les petites entreprises, passant de 33.59% à 18.25 ; ces évolutions historiques sur la volatilité ou sur les rendements se reflètent dans celles des betas (tableau 2).

3.2 Les premiers tests et leurs critiques

Tester le CAPM suppose que l'on connaisse au moins trois variables : les rendements espérés, les betas et le portefeuille de marché. Si ces variables étaient connues, il ne resterait alors qu'à tester l'équation de a prime de risque. Malheureusement, la connaissance de ces variables étant a priori impossible, des stratégies d'évaluation contournant cette difficulté ont été proposées.

Black, Jensen & Scholes (BJS) [BJS72] ont été les premiers à proposer une évaluation du CAPM. Pour tester le modèle suivant :

$$\widetilde{R}_a - R_0 = \gamma_0 + \gamma_1 . \beta_a + \widetilde{\epsilon}_a \tag{15}$$

où γ_1 est le prix du risque sur le marché, γ_0 est le taux du zero-beta, $\widetilde{\epsilon}_a$ est le résidu de la régression, et déterminer si le CAPM est un bon reflet de la réalité, Black-Jensen-Scholes

[5] Ceci constitue l' "equity puzzle" de Mehra & Prescott [MP85] qu'il est si difficile de rationaliser à l'aide des modèles de valorisation d'équilibre.

TAB. 1 – Rentabilité et variabilité, 1926-91

1926-91	Stocks		Trésor U.S.		IPC
	S&P 500	petites capitalisations	bonds	bills	
rendement moyen (%)	11.94	16.05	4.94	3.64	3.11
variabilite (%) (écart-type$\times\sqrt{12}$)	20.22	31.02	7.62	0.94	2.01
valeur terminale par dollar investi	675.59	1,847.63	20.95	11.01	7.67
taux de croissance annuel (%)	10.38	12.07	4.72	3.70	3.14

source : Jaganathan & McGrattan [JM95] p.12

TAB. 2 – Betas estimés pour 4 types actifs

	Stocks		Trésor U.S.	
	S&P 500	petites cap.	bonds	bills
1926-91	1.03	1.39	0.07	0.00
1981-91	1.01	0.99	0.31	-0.01

source : Jaganathan & McGrattan [JM95] p.13

ont estimé la relation suivante :

$$\widetilde{R}_a - R_0 = \gamma_0 + \gamma_1.\beta_a + \gamma_2.\Psi_a + \widetilde{\epsilon}_a \tag{16}$$

où Ψ_a est un vecteur regroupant des éléments additionnels. Le CAPM classique implique évidemment que $\gamma_0 = 0 = \gamma_2$. Le zero-beta de Black [Bla72], en raison d'imperfection des marchés des capitaux, permet une valeur non nulle de γ_0. Dans leur étude, BJS ont classiquement assimilé le rendement espéré au rendement moyen historique, le portefeuille de marché au portefeuille du marché boursier étudié, le NYSE de 1931 à 1965, le rendement certain étant le taux du T-bill à 30 jours. La technique d'estimation consiste à regrouper les actifs échangés en 10 portefeuilles déterminés par les betas historiques. Les valeurs estimées par BJS sont :

$$\gamma_0 = 0.19\%,\ \gamma_1 = 1.08\%$$

Le CAPM classique est donc rejeté. L'excès de rendement moyen effectif étant 1.42%, la valeur de γ_1 est inférieur à sa valeur théorique. La prime de risque estimée pour un risque systématique nul ($\beta = 0$) est de 0.519 au lieu d'être nulle. Ces résultats confirmaient à l'époque les résultats antérieurs de Friend & Blume [1970] [FB70] montrant que les portefeuilles à faibles β se caractérisaient aux Etats-Unis sur la période 1960-68 par une prime de risque supérieure à celle prédite par le CAPM alors que les portefeuilles à forts β étaient inversement caractérisés par une prime inférieure.

Comme Black [1972] [Bla72] [Bla93] l'a soutenu, ces écarts peuvent être expliqués par l'utilisation d'un portefeuille réduit à la place du portefeuille du marché. Jagannathan & McGrattan [1995] [JM95] ont appliqué la stratégie d'estimation de BJS pour quatre types d'actifs (S&P 500, petites entreprises, US T-bonds, US T-bills)[6] sur la période 1926-91 et ont trouvé des résultats parfaitement similaire. L'interprétation courante de ce premier test est qu'il confirme la version zero-beta du CAPM.

L'autre étude classique est celle de Fama & MacBeth [1973] [FM73]. L'échantillon analysé est celui des valeurs échangés sur le NYSE de 1926 à 1968. Au test de BJS, Fama & MacBeth ont testé la capacité de la variance du beta et du rendement a expliqué celle du résidu. En effet, si l'équation :

$$\widetilde{R}_a - R_0 = \gamma_0 + \gamma_1.\beta_a + \widetilde{\epsilon}_a$$

[6] Cf sous-section 3.1.

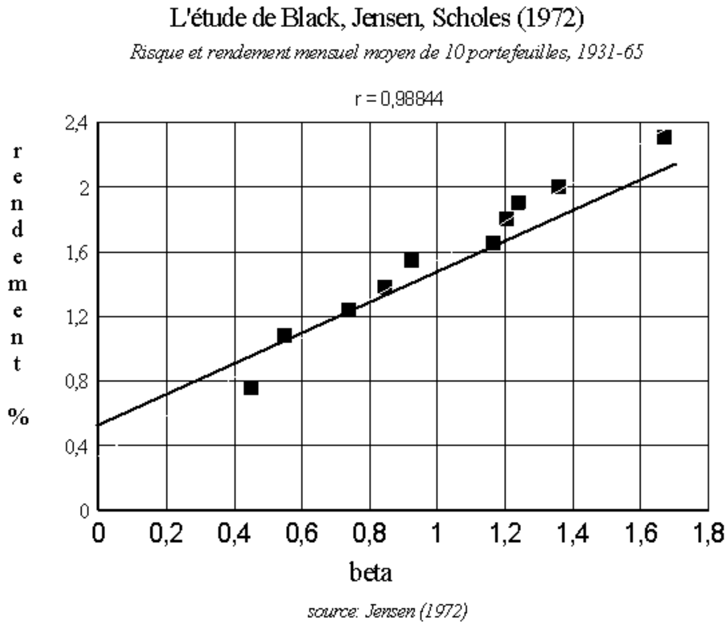

L'étude de Black, Jensen, Scholes (1972)
Risque et rendement mensuel moyen de 10 portefeuilles, 1931-65
r = 0,98844
rendement %
beta
source: Jensen (1972)

FIG. 5 –

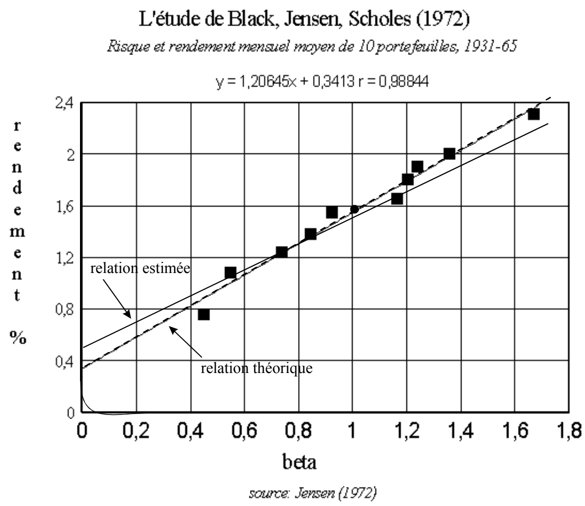

L'étude de Black, Jensen, Scholes (1972)
Risque et rendement mensuel moyen de 10 portefeuilles, 1931-65
y = 1,20645x + 0,3413 r = 0,98844
rendement %
relation estimée
relation théorique
beta
source: Jensen (1972)

FIG. 6 –

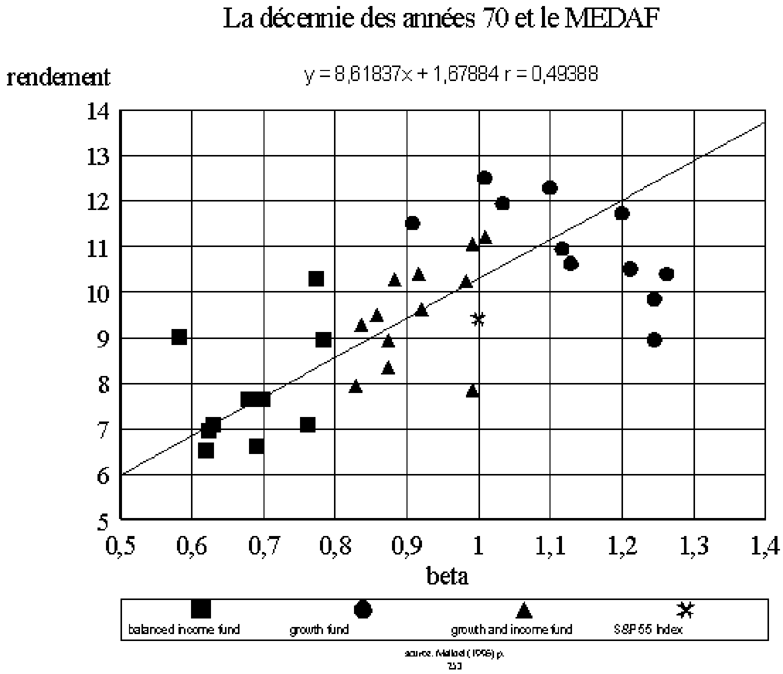


FIG. 7 –

"est vraie", alors :

$$Var\left(\widetilde{R}_a - R_0\right) = Var\left(\gamma_0 + \gamma_1.\beta_a\right) + Var\left(\widetilde{\epsilon}_a\right) \tag{17}$$

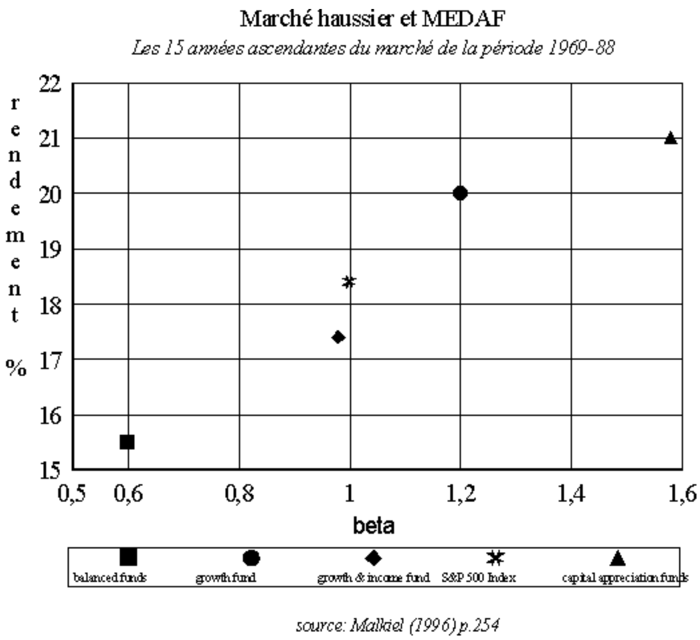
Aussi, $\left(Var\left(\widetilde{R}_a - R_0\right) - Var\left(\widetilde{\epsilon}_a\right)\right) / Var\left(\widetilde{R}_a - R_0\right)$ doit expliquer les résidus. Comme BJS, les tests de FAMA & MCBETH ont généralement été interprétés comme supportant le CAPM.

Les premiers résultats étaient encourageant, mais rapidement des anomalies de valorisation ont été constatée. Ainsi, BRENNAN & COPELAND [1988] [BC88] ont reporté des effets des distributions de dividende sur les bêtas très forts puisque ceci varie de 20 à 30 durant la période encadrant l'annonce des dividendes à distribuer. La distribution étant a priori un événement idiosyncratique peu lié au contexte de marché, les bêtas devraient être peu ou prou invariant aux dividendes annoncés.

Surtout ROLL [1977] [Rol77] a critiqué les méthodes usuelles sur deux points :

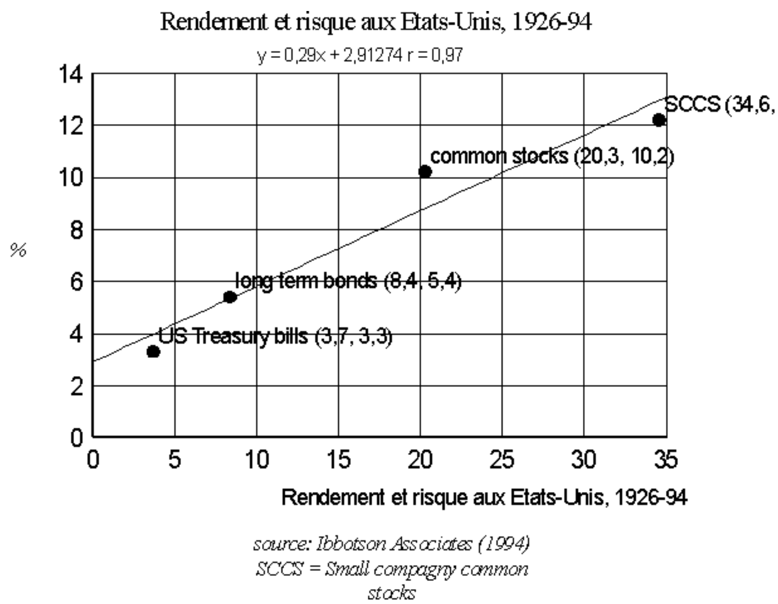
– la faiblesse des tests statistiques employés ;
– le fait que les tests n'utilisent que des proxies du portefeuille de marché.[7]

[7] Roll & Ross [RR94] ont démontré au surplus que, même si ces proxies étaient arbitrairement proches



Marché haussier et MEDAF
Les 15 années ascendantes du marché de la période 1969-88
rendement %
22
21
20
19
18
17
16
15
0,5
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
beta
balanced funds
growth fund
growth & income fund
S&P 500 Index
capital appreciation funds
source: Malkiel (1996) p.254

FIG. 8 –



Rendement et risque aux Etats-Unis, 1926-94
y = 0,29x + 2,91274 r = 0,97
%
14
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
SCCS (34,6,
common stocks (20,3, 10,2)
long term bonds (8,4, 5,4)
US Treasury bills (3,7, 3,3)
Rendement et risque aux Etats-Unis, 1926-94
source: Ibbotson Associates (1994)
SCCS = Small compagny common stocks

FIG. 9 –

TAB. 3 – L'échantillon utilisé par Pogue & Solnik [1974]

	nombre d'actions
Allemagne	36
Belgique	30
France	65
Italie	30
Pays-Bas	24
Royaume-Uni	40
Suisse	17
Etats-Unis	65

source : Pogue & Solnik [1974] page 921

Néanmoins, comme on le verra plus tard la critique la plus sévère à l'encontre du CAPM fut celle de FAMA & FRENCH [FF92].

3.3 Tests sur les pays européens

POGUE & SOLNIK [1974] [PS74] ont présenté au début des années 70 une des premières études du CAPM sur des données européennes. Celles-ci étaient constituées de données journalières de 229 actions de 7 pays européens sur la période de mars 1966 à mars 1971, augmentées pour effectuer une comparaison de 65 actions américaines du New York Stock Exchange et du Standard & Poor's.

Dans chaque pays européens, les actions sélectrionnées étaient les valeurs dont les capitalisations étaient les plus importantes. Aussi, les actions sélectionnées représentaient à elles seules plus de la moitié de la capitalisation de chaque bourse nationale, voire les 3/4 comme dans le cas italien. Les rendements moyens et les risques moyens des actions sont reportés dans le tableau 4 ainsi que sur la figure 10. Si l'on exclue les Etats-Unis, la corrélation entre le risque moyen des actions et leurs rendements est positive. Les

de la vraie frontière des portefeuilles efficients, la relation estimée entre cette proxy et le rendement espéré des actifs pouvait être peu significative.

TAB. 4 – Les rendements et les risques des actions européennes, mars 1966- mars 1971 (Pogue & Solnik [1974])

	Actions		Indices		Taux d'intérêt sans risque
	Rendement moyen	Ecart-type moyen	Rendement moyen	Ecart-type moyen	
Allemagne	0.466	4.430	0.353	2.806	0.190
Belgique	0.306	3.198	0.269	1.724	0.200
France	0.33	4.901	0.301	3.292	0.235
Italie	0.031	4.006	0.062	2.672	0.165
Pays-Bas	0.336	4.422	0.379	2.637	0.208
Royaume-Uni	0.430	5.547	0.274	3.341	0.295
Suisse	0.389	4.609	0.464	2.851	0.136
Etats-Unis	0.015	7.896	0.154	3.135	0.22

source : Pogue & Solnik [1974]

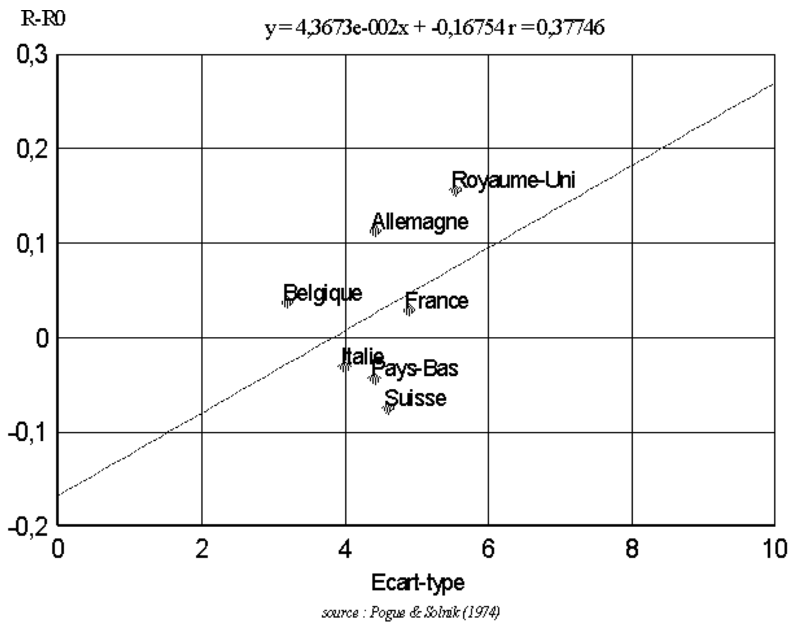


FIG. 10 – Risques et primes de risques en Europe sur la période 1966-1971 (source : Pogue & Solnik [1974])

Tab. 5 – Les betas sur actions européennes, mars 1966- mars 1971 (Pogue & Solnik [1974])

	beta				R2			
	journalier	hebdomadaire	bi-hebdomadaire	mensuel	journalier	hebdomadaire	bi-hedomadaire	mensuel
Allemagne	0.639	0.858	1.129	1.025	0.215	0.363	0.446	0.501
Belgique	0.349	0.693	0.732	1.116	0.044	0.142	0.166	0.369
France	0.586	0.769	0.816	0.84	0.127	0.248	0.302	0.338
Italie	0.724	0.921	0.950	0.950	0.268	0.434	0.462	0.558
Pays-Bas	0.535	0.757	0.773	0.800	0.08	0.186	0.222	0.292
Royaume-Uni	0.787	0.956	0.974	1.046	0.248	0.369	0.368	0.412
Suisse	0.456	0.898	0.924	1.015	0.126	0.299	0.344	0.469
Etats-Unis	1.037	1.116	1.129	1.218	0.084	0.194	0.228	0.244

source : Pogue & Solnik [1974]

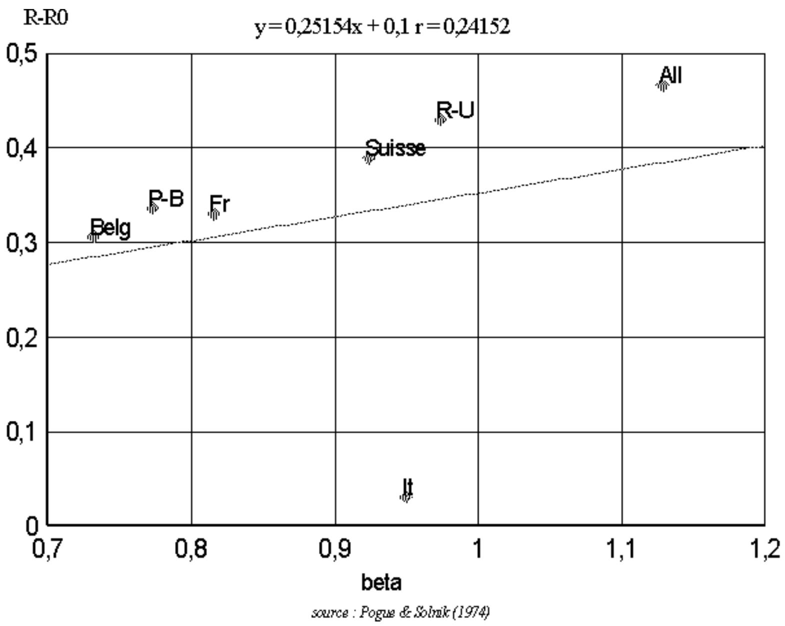


Fig. 11 – Risques et primes de risque en Europe sur données bi-hedomadaires, 1966-1971. (source : Pogue & Solnik [1974]).

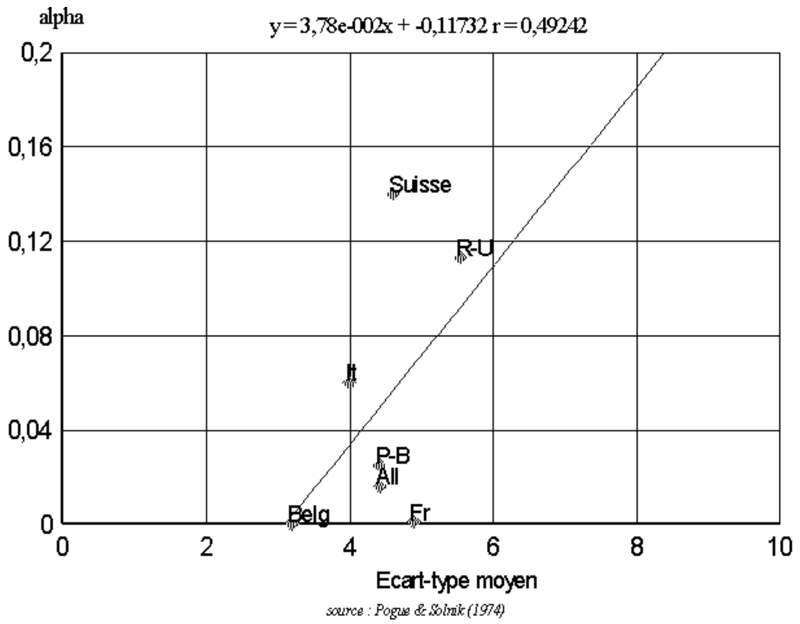


FIG. 12 – Risques et coefficient α en Europe sur données bi-hedomadaires, 1966-1971. (source : Pogue & Solnik [1974]).

équations estimées sont de la forme :

$$\overline{R} - R_0 = \alpha + \beta . \left[\overline{R}_m - R_0 \right] \tag{18}$$

Le tableau 5 présente les résultats obtenus pour les betas à différents horizons (quotidien, hebdomadaire, bi-hebdomadaire et mensuel) ainsi que les R^2 mesurant le pouvoir explicatif de ces variables. Les β sont statistiquement très significatifs dans tous les pays et ils expliquent à un horizon d'un mois entre 30% et 60% de la prime de risque observés dans des pays européens. Au niveau européen (figure 11), les différences nationales sur les primes de risque apparaissent également liées aux β.

Certaines anomalies cependant apparaissent. D'une part la valeur des betas augmentent avec l'horizon ainsi que leur pouvoir explicatif. En supposant que le CAPM soit le vrai modèle, si les prix n'étaient caractérisés par aucune rigidité, les β devraient être indépendants de l'horizon. Si les prix sont caractérisés par une certaine rigidité, par un ajustement partiel à très court terme, alors les β devraient croître avec l'horizon. Aussi POGUE & SOLNIK [1974] interprétaient leurs résultats comme révélant une certaine inefficacité des marchés financiers européens. D'autre part les α estimées ne sont pas toujours

TAB. 6 – Le CAPM en Allemagne, janv. 1971-déc. 1993

$$r_{it} - r_t^F = c_0 + \beta_i(r_{mt} - r_t^F) + u_{it} \qquad u_{it} \sim N(0,\sigma^2)$$

	c_0	β	R^2	Chow-test
BASF	−0.04 (0.02)	0.89 (0.03)*	0.62	13.14*
Bay	−0.02 (0.02)	0.87 (0.03)*	0.63	7.08
BMW	−0.06 (0.06)	1.03 (0.11)*	0.25	2.66
Con	−0.03 (0.04)	0.91 (0.08)*	0.34	22.08*
Dai	−0.02 (0.03)	1.15 (0.05)*	0.65	14.55*
DB	−0.02 (0.02)	1.09 (0.05)*	0.68	7.16
Hoechst	−0.04 (0.02)	0.88 (0.04)*	0.57	13.10*
Man	−0.05 (0.04)	1.08 (0.06)*	0.46	1.80
MG	−0.08 (0.04)	0.97 (0.08)*	0.38	13.30*
RWE	−0.02 (0.03)	0.72 (0.06)*	0.39	13.13*
Schering	−0.02 (0.02)	0.93 (0.04)*	0.57	3.15
Siemens	−0.006 (0.02)	1.07 (0.04)*	0.72	6.39

+Standard errors in brackets. *Significant at the 5% level.

source : Scheicher [2000]

statistiquement non différents de 0. Au surplus, ils apparaissent persistants entre les périodes et corrélés aux risques des actifs (figure 12 au niveau inter-européen). Enfin, la dernière limite empirique du CAPM dans POGUE & SOLNIK [1974] est que les valeurs de β apparaissent pour certains pays peu stables dans le temps.

Plus récemment, SCHEICHER [2000] [Sch00] a également présenté différents tests du CAPM sur données allemandes. Son échantillon porte sur la période allant de janvier 1971 à décembre 1993, comprend 12 actions de la Bourse de Francfort dont BASF, Bayer, BMW, Continental, Daimler, Deutsche Bank (DB), Hoechst, MAN, Metallgesellschaft (MG), RWE, Schering and Siemens. L'indice DAX (sur 30 valeurs pondérées) est pris comme proxy du portefeuille de marché tandis que le taux sans risque est le taux des dépôts interbancaires à trois mois. Les résultats reportés dans le tableau 6 sont ceux obtenus par la méthode des moindres carrés en estimant la relation[8] :

$$R_{it} - R_{0t} = \alpha + \beta_i(R_{mt} - R_{0t}) + \varepsilon_{it}$$

Les restrictions théoriques sont que le rendement en excès indépendant du risque systématique, c'est-à-dire le α dans l'équation, doit être nul et que le β a contrario doit "expliquer" le rendement en excès. De fait, les résultats obtenus avec ce modèle aujourd'hui confirment largement ces restrictions :

[8] Ces résultats sont le début de l'analyse de SHEICHER [2000] laquelle met ensuite en lumière l'instabilité de cette version simple du CAPM et la supériorité d'un modèle comprenant un second facteur.

- les α ne sont pas statistiquement significatifs ;
- les β sont tous statistiquement significatifs au seuil de 5% ;
- leurs valeurs va de 0.7 à 1.1 et ils expliquent selon les titres en moyenne légèrement plus de 50% de la prime de risque, avec un minimum de 25%, un maximum de 72%.

Une limite cependant au pouvoir explicatif de ce modèle simple est une certaine instabilité des relations entre la prime de risque et le risque systématique. Les tests de Chow effectués par SCHEICHER pour évaluer la présence de ruptures dans cette relation rejette en effet dans la moitié des cas l'hypothèse de stabilité.

4 Le MEDAF sans actif certain

Le modèle classique du MEDAF suppose, outre que les marchés sont concurrentiels, qu'il existe un actif sans risque et des marchés parfaits, i.e l'inexistence de contraintes quantitatives d'endettement. Fisher Black [9], dans un article classique [Bla72], a démontré qu'en fait, même en l'absence de telles hypothèses il était possible d'obtenir une telle relation linéaire.

Le point de départ est la démonstration que même en l'absence d'un actif certain (et d'un marché parfait de celui-ci), le portefeuille de marché est un portefeuille efficient dans le cadre de la théorie classique du portefeuille à la Markowitz. Il vérifie donc la condition marginale désormais bien connue :

$$\sigma_m^2 + \mu = \lambda \overline{R}_m \tag{19}$$

$$\sigma_{jm} + \mu = \lambda \overline{R}_j, \; j = 1, ..., J \tag{20}$$

où λ et μ sont les multiplicateurs associés lorsque l'on veut atteindre un rendement $\widehat{R} = \overline{R}_m$. Est alors introduit le concept de portefeuille conjugué. Pour tout portefeuille p de la frontière, son portefeuille conjugué $zc(p)$ est le portefeuille dont la covariance est nulle :

$$zc(p) : cov\left(\widetilde{R}_p, \widetilde{R}_{zc(p)}\right) = 0 \tag{21}$$

Le portefeuille conjugué comme tout portefeuille peut être obtenu en combinant linéairement les différents actifs $j = 1, ..., J$ et donc (20) impose que ce portefeuille vérifie

[9] Et dans une certaine mesure Lintner [Lin69].

nécessairement la relation :

$$\sigma_{zc(m),m} + \mu = \lambda \overline{R}_{zc(m)} \tag{22}$$

Cependant par définition du portefeuille conjugué $\sigma_{zc(m),m} = 0$ et donc :

$$\mu = \lambda \overline{R}_{zc(m)} \tag{23}$$

Grâce à la présence du portefeuille conjugué, le coût marginal de financement μ est proportionnel au rendement espéré d'un actif comme dans le MEDAF où implicitement le coût d'opportunité du financement est $\lambda \overline{R}_0$.

Supposons qu'à l'équilibre on investisse dx dans le portefeuille conjugué en finançant ceci par une diminution symétrique de la position dans le portefeuille de marché. Alors nécessairement le bilan de cette opération est la différence entre le gain net $dx(\lambda \overline{R}_{zc(m)} - \mu)$ et le coût marginal $dx(\lambda \overline{R}_j - (\sigma_{jm} + \mu))$. Comme on est à l'équilibre ces différences vérifient les relations (19) et (23). Aussi nécessairement on doit avoir :

$$\lambda \overline{R}_{zc(m)} - \mu = \lambda \overline{R}_m - \left(\sigma_m^2 + \mu\right)$$

et donc le gain de se contituer ce portefeuille auto-financé court en indice de marché, long dans le portefeuille conjugué du marché est nul. En rassemblant les termes on a donc :

$$\sigma_m^2 = \lambda \left(\overline{R}_m - \overline{R}_{zc(m)}\right)$$

Si l'on fait la même opération entre cette fois un actif quelconque j et le portefeuille de marché (que l'on vend pour financer l'opération) alors on aura similairement que :

$$\lambda \overline{R}_j - (\sigma_{j,m} + \mu) = \lambda \overline{R}_m - \left(\sigma_m^2 + \mu\right)$$

et donc :

$$\sigma_m^2 - \sigma_{j,m} = \lambda \left(\overline{R}_m - \overline{R}_j\right)$$

Par conséquent en utilisant cette dernière relation ainsi que la relation obtenue pour $zc(m)$:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\overline{R}_j - \overline{R}_m}{\sigma_{j,m} - \sigma_m^2} = \frac{\overline{R}_m - \overline{R}_{zc(m)}}{\sigma_m^2}$$

On peut alors réarranger cette équation pour obtenir l'expression de la prime de risque à l'équilibre :

$$\sigma_m^2 \left[\overline{R}_j - \overline{R}_m\right] = \left[\sigma_{j,m} - \sigma_m^2\right] \left[\overline{R}_m - \overline{R}_{zc(m)}\right]$$

et donc :

$$\sigma_m^2 \overline{R}_j = \sigma_{j,m} \left[\overline{R}_m - \overline{R}_{zc(m)} \right] + \sigma_m^2 \overline{R}_{zc(m)}$$

ou encore :

$$\sigma_m^2 \left[\overline{R}_j - \overline{R}_{zc(m)} \right] = \sigma_{j,m} \left[\overline{R}_m - \overline{R}_{zc(m)} \right]$$

En réarrangeant les termes on obtient :

$$\overline{R}_j - \overline{R}_{zc(p)} = \beta_i \left[\overline{R}_m - \overline{R}_{zc(m)} \right]$$

avec :

$$\beta_j = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}$$

Théorème 1 (Black (1972)) *Même en l'absence d'un actif sans risque, le rendement moyen de tout portefeuille efficient est une fonction linéaire de son bêta :*

$$\overline{\mathbf{R}}_j = \overline{R}_{zc(m)} + \beta_j \left[\overline{R}_m - \overline{R}_{zc(m)} \right] \tag{24}$$

où

$$\beta_j = \frac{cov\left(\widetilde{R}_m, \widetilde{R}_j \right)}{\sigma_m^2}$$

L'intérêt du modèle de Black est sa capacité à étendre le MEDAF aux économies où les agents sont soumis à des contraintes d'endettement. Sur la figure 13 est reporté le taux R_f auquel les agents peuvent prêtés. Si M' est supposé être le portefeuille de marché et si tous les agents sont prêteurs, alors la droite de marché est la droite $R_f M'$. L'économie se comporte conformément au MEDAF classique. Cependant, si certains agents ne se contentent pas d'épargne, mais souhaitent s'endettement pour avoir un portefeuille plus risqué (à droite de M' donc), les contraintes d'endettement vont devenir actives. A l'équilibre, l'excès de rendement des portefeuilles de ces agents va donc être désormais donné par celui du portefeuille de marché et de son portefeuille conjugué. Comme le portefeuille de marché doit tenir compte à l'équilibre de tous les investissements réalisés, le portefeuille de marché M va être à droite de M'. La droite de marché est alors donnée par la droite $ER_{zc(m)}M$. La construction du nouveau portefeuille de marché et le fait que le rendement du portefeuille conjugué soit sur la tangente de M assure que $ER_{zc(m)} > R_f$, i.e. que le taux d'intérêt effectif auquel les agents s'endettent est supérieur au taux prêteur. La conséquence de ceci est que la droite de marché alors observée est plus plate que celle du MEDAF classique.

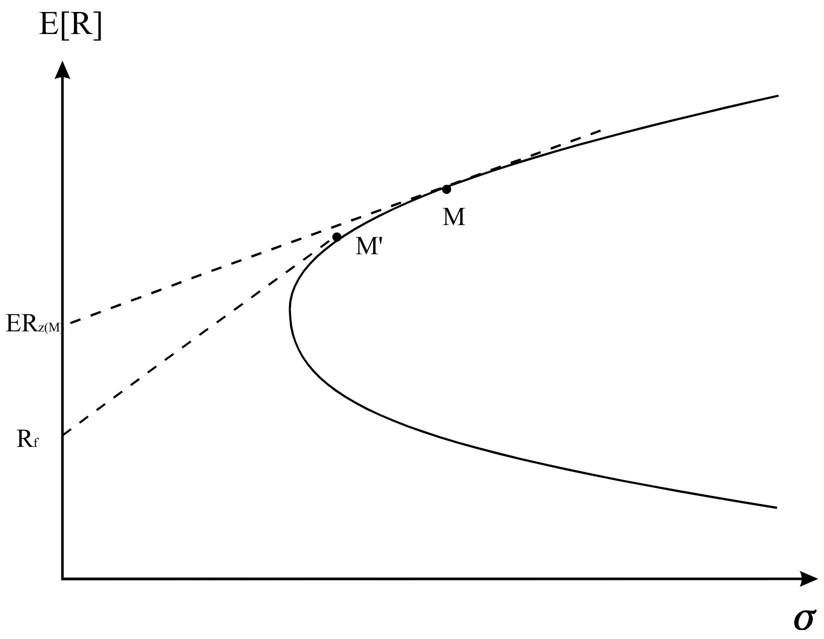


FIG. 13 – Contraintes d'endettement et droite de marché.

5 Equilibre général et CAPM

L'économie est supposée être une économie d'échanges de deux périodes, avec un unique bien de consommation à chaque période. L'incertitude est résumée par S états du monde $s = 1, ..., S$ dont les probabilités sont notées π_s.

L'économie est peuplée de I agents indicés $i = 1, ..., I$. Pour chaque agent i, sa consommation à la période 0 est notée c_0^i, celle de sa période 1 dans l'état s est notée c_s^i (avec $s = 1, ..., S$). Similairement, ses dotations à la date 0 et à la date 1 dans l'état s sont respectivement notées ω_0^i et ω_s^i (avec $s = 1, ..., S$). Les préférences de chaque agent sont supposées vérifiées l'axiomatique de l'utilité espérée et la fonction d'utilité élémentaire être de la forme séparable :

$$u_i(c_0^i) + \beta u_i(c_s^i)$$

où u_i est strictement croissante et strictement monotone :

$$\forall c > 0 : u_i'(c) > 0, \; u_i''(c) < 0$$

La fonction d'utilité espérée s'écrit donc :

$$U_i = u_i(c_0^i) + \beta \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i(c_s^i) \tag{25}$$

et la disposition marginale à payer aujourd'hui chaque unité de numéraire perçu demain dans l'état s, le $Tms^i_{0\to s}(c^i)$, est donc :

$$Tms^i_{0\to s}\left(c^i\right) = \pi_s \beta \frac{u'_i\left(c^i_s\right)}{u'_i\left(c^i_0\right)} \tag{26}$$

Tout actif supplémentaire, dont les revenus sont $V = [V_1, ..., V_s, ..., V_S]^\top$, a, à l'équilibre, un prix q. Nécessairement, à l'équilibre (que les marchés soient ou non complets), on doit donc avoir pour chaque agent i que :

$$q = \sum_{s=1}^{S} Tms^i_{0\to s}\left(c^i\right) \times V_s \tag{27}$$

Dans l'état s, si le prix est q, le revenu V_s, le rendement R_s est alors :

$$R_s = \frac{V_s}{q} \tag{28}$$

Chaque actif peut donc être aussi résumé par son vecteur de rendement R :

$$R = (R_1, ..., R_s, ..., R_S)^\top$$

La relation (27) peut donc réécrite dans l'espace des rendements :

$$1 = \sum_{s=1}^{S} Tms^i_{0\to s}\left(c^i\right) \times \left(\frac{V_s}{q}\right) \tag{29}$$

ou encore :

$$1 = \sum_{s=1}^{S} Tms^i_{0\to s}\left(c^i\right) \times R_s \tag{30}$$

Si les marchés sont complets, on peut supposer qu'il existe S *actifs élémentaires* a_s, $s = 1, ..., S$. Chaque actif a_s rapporte une unité de numéraire uniquement dans l'état s, et rien sinon. Son prix est noté β_s. A l'équilibre on doit avoir nécessairement (par application de (27) à l'actif élémentaire a_s) :

$$\beta_s = Tms^i_{0\to s}\left(c^i\right)$$

Par conséquent, en marchés complets les relations (27) et (30) se réécrivent :

$$q = \sum_{s=1}^{S} \beta_s . V_s \tag{31}$$

$$\sum_{s=1}^{S} \beta_s.R_s = 1 \tag{32}$$

La complétude assure donc que tous les agents donnent la même valeur aux revenus futurs ($\sum_{s=1}^{S} \beta_s.V_s$) et aux rendements ($\sum_{s=1}^{S} \beta_s.R_s$).

Un des intérêts de ce cadre simple est d'illustrer la possibilité de refonder le CAPM dans un cadre d'équilibre général, reformulation qui est connue sous le nom de CAPM de consommation (ou CCAPM).

La relation (32)vérifiée à l'équilibre par les rendements se réécrit donc :

$$\sum_{s=1}^{S} \left[\pi_s \beta \frac{u_i'(c_s^i)}{u_i'(c_0^i)} \right] .R_s = 1$$

ou :

$$\frac{\beta}{u_i'(c_0^i)} \sum_{s=1}^{S} \pi_s. \left[u_i'\left(c_s^i\right) R_s \right] = 1$$

ou encore :

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s. \left[u_i'\left(c_s^i\right) R_s \right] = \frac{u_i'(c_0^i)}{\beta} \tag{33}$$

La relation pour l'actif certain est alors :

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s. \left[u_i'\left(c_s^i\right) R_0 \right] = \frac{u_i'(c_0^i)}{\beta}$$

En faisant la différence, on obtient donc :

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s. \left[u_i'\left(c_s^i\right) (R_s - R_0) \right] = 0 \tag{34}$$

Cette **équation fondamentale** peut être réécrite en remarquant que le terme entre crochets est le produit de deux variables aléatoires : $u_i'\left(c_s^i\right)$ et R_s. Or, par définition de la covariance, lorsque l'on a deux variables aléatoires $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$:

$$\begin{aligned} cov(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \mathbf{E}[\widetilde{x}.\widetilde{y}] - \mathbf{E}[\widetilde{x}]\,\mathbf{E}[\widetilde{y}] \\ &= \sum_s \pi_s. [x_s.y_s] - \mathbf{E}[\widetilde{x}]\,\mathbf{E}[\widetilde{y}] \\ &\Rightarrow \sum_s \pi_s. [x_s.y_s] = \mathbf{E}[\widetilde{x}]\,\mathbf{E}[\widetilde{y}] + cov(x, y) \end{aligned}$$

Aussi, l'application de cette relation nous donne :

$$\mathbf{E}\left[u_i'\left(\widetilde{c}^i\right)\right] \mathbf{E}\left[\widetilde{R} - R_0\right] + cov\left(u_i'\left(\widetilde{c}^i\right), \widetilde{R} - R_0\right) = 0 \tag{35}$$

Comme R_0 est une valeur constante, la relation se simplifie :

$$\mathbf{E}\left[u_i'\left(\widetilde{c}^i\right)\right]\left(\mathbf{E}\left[\widetilde{R}\right]-R_0\right)+cov\left(u_i'\left(\widetilde{c}^i\right),\widetilde{R}\right)=0$$

et donc on obtient la relation fondamentale reliant le rendement moyen de chaque actif risqué au rendement certain de l'économie :

$$\mathbf{E}\left[\widetilde{R}\right]=R_0-\frac{1}{\mathbf{E}\left[u_i'\left(\widetilde{c}^i\right)\right]}cov\left(u_i'\left(\widetilde{c}^i\right),\widetilde{R}\right) \tag{36}$$

La différence entre le rendement moyen risqué $\mathbf{E}\left[\widetilde{R}\right]$ et le rendement certain R_0 est la prime de risque de l'actif ρ :

$$\rho=-\frac{1}{\mathbf{E}\left[u_i'\left(\widetilde{c}^i\right)\right]}cov\left(u_i'\left(\widetilde{c}^i\right),\widetilde{R}\right)$$

Au prix de restrictions supplémentaires, il est possible d'utiliser la relation (36) pour obtenir une expression macroéconomique de la prime de risque.

Lorsque les consommations aléatoires c_s^i sont *normalement distribuées*, un théorème du à Rubinstein [1976] [Rub76] (approfondissant le lemme de Stein [Ste73]) assure que :

$$cov\left(u_i'\left(\widetilde{c}^i\right),\widetilde{R}\right)=\mathbf{E}\left[u_i''\left(\widetilde{c}^i\right)\right].cov\left(\widetilde{c}^i,\widetilde{R}\right) \tag{37}$$

Remarque 3 *Ce résultat est exactement vrai pour des variables normales. Mais lorsque la variable $\widetilde{c}^i$ varie* suffisamment peu, *approximativement on a :*

$$u_i'\left(\widetilde{c}^i\right)\approx u_i'\left(\mathbf{E}\left[\widetilde{c}^i\right]\right)+\mathbf{E}\left[u_i''\left[\widetilde{c}^i\right]\right].\left[\widetilde{c}^i-\mathbf{E}\left[\widetilde{c}_i\right]\right]$$

et donc, après quelques calculs, on obtient :

$$cov\left(u_i'\left(\widetilde{c}^i\right),\widetilde{R}\right)\approx\mathbf{E}\left[u_i''\left(\widetilde{c}^i\right)\right].cov\left(\widetilde{c}^i,\widetilde{R}\right)$$

La relation (36) devient donc :

$$\mathbf{E}\left[\widetilde{R}\right]=R_0+\left(-\frac{\mathbf{E}\left[u_i''\left(\widetilde{c}^i\right)\right]}{\mathbf{E}\left[u_i'\left(\widetilde{c}^i\right)\right]}\right)cov\left(\widetilde{c}^i,\widetilde{R}\right)$$

Le terme $\left(-\frac{\mathbf{E}\left[u_i''\left(\widetilde{c}^i\right)\right]}{\mathbf{E}\left[u_i'\left(\widetilde{c}^i\right)\right]}\right)$ est parfois appelé l'aversion globale à l'égard du risque. On le note A_i. Aussi, on obtient :

$$\mathbf{E}\left[\widetilde{R}\right]=R_0+A_i.cov\left(\widetilde{c}^i,\widetilde{R}\right)$$

$$\frac{1}{A_i}\left(\mathbf{E}\left[\widetilde{R}\right]-R_0\right)=cov\left(\widetilde{c}^i,\widetilde{R}\right)$$

En sommant sur l'ensemble des agents :

$$\sum_i \frac{1}{A_i}\left(\mathbf{E}\left[\widetilde{R}\right]-R_0\right)=\sum_i cov\left(\widetilde{w}^i,\widetilde{R}\right)$$

et donc en utilisant les propriétés des covariances et en notant c la richesse globale globale :

$$\left(\mathbf{E}\left[\widetilde{R}\right]-R_0\right)\sum_i \frac{1}{A_i}=cov\left(\widetilde{c},\widetilde{R}\right) \tag{38}$$

En marchés complets, il existe un actif, ou un portefeuille, parfaitement corrélé avec la consommation globale. Le rendement moyen de cet actif, noté $\mathbf{E}\left[\widetilde{R}_c\right]$, vérifie :

$$\left(\mathbf{E}\left[\widetilde{R}_c\right]-R_0\right)\sum_i \frac{1}{A_i}=var\left(\widetilde{c}\right)$$

d'où :

$$\sum_i \frac{1}{A_i}=\frac{var\left(\widetilde{c}\right)}{\mathbf{E}\left[\widetilde{R}_c\right]-R_0} \tag{39}$$

Pour tout autre actif, la relation (38) se réécrit alors pour tout actif a :

$$\mathbf{E}\left[\widetilde{R}_a\right]=R_0+\beta_a\left[\mathbf{E}\left[\widetilde{R}_c\right]-R_0\right] \tag{40}$$

où $\beta_a=\frac{cov\left(\widetilde{c},\widetilde{R}_a\right)}{var\left(\widetilde{c}\right)}$. Cette équation résume le modèle de Rubinstein : la prime de risque de risque de chaque actif y apparait comme déterminée par la "corrélation" de l'actif et l'évolution macroéconomique, plus précisément de celle-ci de la consommation. Plus le rendement de l'actif est corrélé avec la consommation, plus l'actif est donc sensible au cycle économique, plus le β de l'actif est grand ainsi que sa prime de risque.

Références

[Ban81] R. Banz, (1981. The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of Financial Economics*, 9 :3–18, March 1981.

[BC88] M.J Brennan and T.E. Copeland, (1988). Beta changes around stock splits : a note. *Journal of Finance*, 43 :1009–13, septembre 1988.

[Ber95] P.L. Bernstein, (1995). *Des idées capitales.* Finance. PUF, Paris, 1995. Traduction de "Capital ideas - the improbable origins of modern Wall Street" (1992).

[BJS72] F. Black, M.C. Jensen, and M. Scholes, (1972). The capital asset pricing model : some empirical tests. In M.C Jensen, editor, *Studies in the Theory of Capital Markets*. Praeger, N.Y, 1972.

[Bla72] F. Black, (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45 :444–53, 1972.

[Bla88] F. Black, (1988). Option formulas and nikkei options. Working paper, 1988.

[Bla93] F. Black, (1993). Beta and return. *Journal of Portfolio Management*, 20 :8–18, Fall 1993.

[Bre89] M.J. Brennan, (1989). Capital asset pricing model. In M. Milgate & P. Newman J. Eatwell, editor, *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Stockton Press, N.Y, 1989.

[FB70] I. Friend and M. Blume, (1970. Measurement of portfolio performance under uncertainty. *American Economic Review*, 60(4) :561–75, September 1970.

[FF92] E. Fama and K. French, (1992). The cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance*, 47 :427–65, June 1992.

[FM73] E. Fama and J. MacBeth, (1993). Risk, return and equilibrium : empirical tests. *Journal of Political Economy*, 81 :606–36, 1973.

[Gro95] S.J. Grossman, (1995). Dynamic asset allocation and the informational efficiency of markets. *Journal of Finance*, 50(3) :773–87, July 1995.

[JM95] R. Jagannathan and E.R. McGrattan, (1995). The capm debate. *Federal Reserve Bank of Minneapolis*, 19(4) :4, Fall 1995.

[Lin65] R. Lintner, (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47 :13–37, février 1965.

[Lin69] J. Lintner, (1969). The aggregation of investor's diverse judgements and preferences in a purely competitive markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pages 346–82, 1969.

[Mar52] H. Markowitz, (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, février 1952.

[Mar59] H. Markowitz, (1959). *Portfolio selection : efficient diversification of investments.* Wiley, N.Y, 1959.

[Mos66] J. Mossin, (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34 :768–83, 1966.

[MP85] R. Mehra and E.C. Prescott, (1985). The equity premium : a puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 15 :145–61, 1985.

[PS74] G.A. Pogue and B. Solnik, (1974). The market model applied to european common stocks : Some empirical results. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pages 917–44, December 1974.

[Rol77] R. Roll, (1977). A critique of the asset pricing theory's tests : part i : On past and potential testability of the theory. *Journal of Financial Economics*, 4 :129–76, 1977.

[Ros89] S.A. Ross, (1989). Finance. In M. Milgate & P. Newman J. Eatwell, editor, *The New Palgrave Dictionary of Economics*, pages 322–36. Stockton Press, N.Y, 1989.

[RR94] R. Roll and S.A. Ross, (1994). On the cross-sectional relation between expected returns and betas. *Journal of Finance*, 49 :31–38, 1994.

[Rub76] M. Rubinstein, (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *Bell Journal of Economics*, 7 :407–25, 1976.

[Sch00] M. Scheicher, (2000). Time-varying risk in the german stock market. *European Journal of Finance*, 6 :70–91, 2000.

[Sha64] W. Sharpe, (1964). Capital asset prices : a theory of market equilibrium under condition of risk. *Journal of Finance*, septembre 1964.

[Sha70] W. Sharpe, (1970). *Portfolio theory and capital markets.* McGraw-Hill, N.Y, 1970.

[Ste73] C. Stein, (1973). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. Proceedings of the Prague Symposium on Asymptotic Statistics, 1973.

[Tob58] J. Tobin, (1958). Liquidity preferences as behavior toward risk. *Review of Economic Studies*, 25 :65–86, 1958.