

## I – Intérêts Simples

### A – Généralités.

#### 1. Définition

- Un intérêt  $I$  est dit simple lorsqu'il est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{payé en une seule fois} \\ \text{et proportionnel à la durée du placement.} \end{array} \right.$
- Il est fonction de :  $\left\{ \begin{array}{l} t : \text{ le taux d'intérêt,} \\ n : \text{ la durée du placement,} \\ C : \text{ le capital.} \end{array} \right. \quad \boxed{I = C \times t \times n}$
- Attention : Il faut toujours exprimer  $t$  et  $n$  en unité de temps comparable.  
Par exemple  $t$  annuel et  $n$  en année, ou  $t$  mensuel et  $n$  en mois.
- Exemple 1 :  
Soit un capital  $C$  de 100 000 euros placé durant 1 an au taux annuel de  $t = 4\%$ , le montant des intérêts perçus par l'investisseur au terme de l'année est de :  
 $I = 100\,000 \times 0,04 \times 1 = 4\,000$  euros

#### 2. Le taux d'intérêt : $t$

Le taux d'intérêt est l'intérêt payé (ou rapporté) par période de prêt (ou le placement) d'un capital.  
Dans la pratique, ce taux est généralement exprimé en pourcentage ( $t = 9\%$ ) et pour une période annuelle.

#### 3. La durée : $n$

Cette donnée obéit à des conventions précises mais évolutives en fonction du type de prêt ou de placement. Il est donc nécessaire de toujours se faire préciser quelles sont les conventions adoptées si l'on veut avoir une idée précise de ce que représente véritablement le taux d'intérêt d'une opération.

Si nous prenons l'exemple de calcul en nombre de jour, la durée s'exprime en fraction d'année. La **Base** étant le nombre de jours conventionnels dans une année, elle s'écrit :

$$n = \frac{\text{nombre de jours du prêt}}{\text{Base}}$$

- La Base : Les cas les plus fréquents sont :
  - $\left\{ \begin{array}{l} \text{Base} = 360 : \text{ on parle de base commerciale (année bancaire)}^1 \\ \text{Base} = 365 \text{ ou } 366 : \text{ on parle de base exacte}^2. \end{array} \right.$
- Le nombre de jours de prêt  
Il obéit aussi à des conventions.
  - ✓ Dans le cadre d'une base en jours exacts,  
ce nombre de jours correspond en général au nombre de jours « exacte »  
Ex. : entre le 2 et le 18 du mois on compte  $18 - 2 = 16$  jours, tout se passe comme si la somme « travaille » à partir du 3 au matin.
  - ✓ Dans le cadre d'une base 360,  
Deux modes sont utilisés,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{le précédent} \\ \text{ou le calcul dit « en mois »} \end{array} \right.$   
On considère que l'année de 360 jours se décompose en 12 mois de 30 jours. Quels que soient les mois considérés,  $N$  mois représentent  $(30 \times N)$  jours. Ce mode de calcul est surtout utilisé dans le cas de remboursement par échéances constantes.

→ Application : Exercice 1 de la fiche

<sup>1</sup> La pratique d'une année bancaire remonte au Moyen – Age. Pour la petite histoire, les babyloniens utilisaient un système de numération en base 60 à cause du nombre élevé de diviseurs de 60, et  $360 = 6 \times 60$ .

<sup>2</sup> Les anglais raisonnent en base 365

## B – Intérêts pré et post-comptés

### 1. Intérêts pré et post-comptés

Les intérêts étant calculés par la formule précédente, deux modes de versement ou de payement des intérêts sont possibles :

✓ Les intérêts post-comptés

Les intérêts sont dits post-comptés quand ils sont comptés en fin de période.

*Exemple 1* : Déblocage du prêt en début de période et remboursement du capital et des intérêts en fin de période.

*Exemple 2* : Découvert de banque pour lequel les agios sont prélevés à la fin de chaque trimestre.

✓ Les intérêts précomptés

Les intérêts sont dits précomptés quand ils sont comptés en début de période. C'est le cas notamment pour les agios et commission d'escompte qui sont décomptés au moment même de la remise de l'effet. L'entreprise ne reçoit que le montant net de l'effet.

*Exemple* : L'emprunteur paiera les intérêts  $I$  de manière simultanée au déblocage du capital  $C$ . Il ne recevra donc en fait que  $C - I$ . En fin de période il ne remboursera que le capital  $C$ .

→ Application : Exercice 2 de la fiche

### 2. Passage du Taux post-compté au taux précompté

$$T_{\text{post}} = \frac{T_{\text{pré}}}{1 - D \times T_{\text{pré}}}$$

Démonstration : ( $D = n/360$ )

$$\begin{aligned} I_{\text{pré}} &= C \times T_{\text{pré}} \times D &= (C - I_{\text{pré}}) \times D \times T_{\text{post}} \\ \text{Donc } C \times T_{\text{pré}} \times D &= (C - C \times T_{\text{pré}} \times D) \times D \times T_{\text{post}} \\ \text{Soit } T_{\text{pré}} &= (1 - T_{\text{pré}} \times D) \times T_{\text{post}} \end{aligned}$$

Remarque : Le taux post-compté est aussi appelé **taux de rendement** ou **taux « in fine »** car il permet de calculer les intérêts réellement perçus pour un capital placé

## II – Calcul des intérêts composés et de la valeur acquise

### A– Intérêts composés

Un capital est placé à intérêts composés quand, à la fin de la période (dite période de capitalisation), les intérêts sont rajoutés au capital pour porter eux-mêmes intérêts pour la période suivante...

C'est donc une application des suites géométriques.

### B – Valeur acquise d'un capital placé à intérêts composés

Si  $C_n$  est la valeur acquise d'un capital  $C_0$  placé au taux périodique  $T_p$  alors

$$C_n = C_0 \times (1 + T_p)^n$$

► Exemple 2

M. BERTO place 100 000 le 01.01.2006 pour 2 ans au taux annuel de 4%. (*Réponse : 108 160,00*)

## III – Taux de rendement Annuel Arithmétique : TRAA

### A - Taux de Rendement Annuel Arithmétique

Taux permettant de calculer la quantité d'intérêts de l'opération, soit

$$T_p = \frac{C_1 - C_0}{C_0} \times \frac{360}{D} \quad \text{Ou} \quad T_p = \frac{C_1 - C_0}{C_0} \times \frac{1}{A}$$

Remarque :  $T_p$  est le **TRAA**

► Exemple 3

M. BERTO place 100 000 le 01.01.2006 pour 2 ans au taux annuel de 4%. On a calculé que la valeur du capital au terme des 2 ans est de 108 160,00. Montrer que le TRAA est de 4,08%.

**B - Taux proportionnel annuel (ou taux nominal)**

Définition : Deux Taux sont proportionnels si leur rapport est égal à celui de leur période de capitalisation respective.  $T = \text{taux proportionnel annuel} = 12 \times t$  ( $t = \text{taux mensuel}$ )

$$\boxed{\text{Taux proportionnel annuel} = \text{taux périodique} \times \text{période}}$$

► Exemple 4

- Si  $t$  est un taux mensuel,  $T = \dots\dots\dots$
- Si  $t$  est un taux trimestriel,  $T = \dots\dots\dots$
- Si  $t$  est un taux annuel,  $T = \dots\dots\dots$



Remarque : C'est le taux utilisé par les banques pour le calcul des intérêts mensuels lors d'un crédit.  $T$  et  $t$  ne génèrent pas les mêmes intérêts.

**C - Taux de rendement actuariel (Taux équivalents)**

- Définition : Deux taux sont dits équivalents s'ils génèrent, pour un capital et une durée donnée mais des périodes de capitalisation qui peuvent être différentes, un même taux d'intérêts
- Taux équivalent annuel :  
Le plus souvent on calcule le taux actuariel annuel correspondant au taux mensuel, trimestriel...

on a alors  $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{T_{\text{act}} = (1 + T_p)^n - 1} \\ \boxed{T_p = (1 + T_{\text{act}})^{1/n} - 1} \end{array} \right.$  avec  $\left\{ \begin{array}{l} T_{\text{act}} : \text{le taux actuariel annuel} \\ T_p : \text{le taux de la période donnée} \\ n : \text{le nombre de périodes dans une année} \end{array} \right.$

► Exemple 5

Quel est le taux périodique annuel équivalent au taux périodique trimestriel de 3%

**Cas général :**

Le plus simple est d'alors écrire l'égalité des capitaux après un an soit :

$$\boxed{C_0 \times (1 + T_{\text{mensuel}})^{12} = C_0 \times (1 + T_{\text{trimestre}})^4 = C_0 \times (1 + T_{\text{annuel}})^1 = \dots}$$

**IV – Calcul de la valeur actuelle dans le cas d'opérations à deux flux.****A - Définition de la valeur actuelle**

$$\boxed{C_0 = C_n \times (1 + T_p)^{-n}}$$
 avec :  $\left\{ \begin{array}{l} C_0 : \text{Valeur actuelle} \\ C_n : \text{le flux futur} \\ T_p : \text{le taux périodique d'actualisation} \\ n : \text{le nombre de période pour la durée d'actualisation.} \end{array} \right.$

► Exemple 6

Supposons un capital de 100 000 acquis au terme d'un placement de 5 ans au taux annuel de 10%.  
Recherchons le capital initialement placé pour obtenir cette somme. (*Rep. : 62 092,13*)

**V – L'escompte et le découvert****A – L'escompte**1. Définition

Un effet de commerce (lettre de change, billet à ordre ou warrant) constate l'engagement pris par un débiteur de payer à son créancier à une date déterminée une somme d'argent, montant de la dette qu'il a contractée.

Si le créancier a besoin de cet argent avant l'échéance stipulée, il cédera l'effet de commerce, avec tous les droits qui s'y attache, à une banque, suivant la technique de l'escompte : le banquier escompteur achète l'effet et se substitue au créancier ; le débiteur paiera au banquier le montant de sa dette à l'échéance fixée. Le banquier verse par avance au créancier la somme diminuée des intérêts et commissions perçues.

Ce moyen de financement qui permet aux entreprises de disposer du montant de leurs créances avant leur échéance constitue une « mobilisation de créances ».

► Exemple 7

Un commerçant négocie une traite de 8 240, payable dans 55 jours, au taux d'escompte 12,60%. Un jour de banque est facturé. Calculer l'escompte commercial (*Rép. : 161,50*) et la valeur actuelle de l'effet (*Rép. : 8 078,50*).

2. Calcul des agios

Vendre un effet de commerce, c'est le **négociier**. L'acheter c'est l'**escompter**.

Le total des intérêts, frais de commissions perçus par une banque en rémunération d'un crédit qu'elle consent, constitue des agios.

$$\text{AGIOS} = \text{INTERETS} + \text{COMMISSIONS}$$

a. L'escompte

La valeur actuelle de l'effet à la date d'escompte est le montant de l'effet payable à l'échéance (valeur nominale) diminué de l'intérêt perçu (escompte) et des commissions, par le banquier escompteur.

Pour le calcul de l'escompte, quand l'échéance de l'effet est très éloignée (plus d'un an) on utilise les intérêts composés. A l'intérieur d'une année on utilise les intérêts simples.

L'intérêt est calculé : Sur la valeur nominale de l'effet, au taux d'escompte en fonction de la durée qui sépare le jour de négociation (remise de l'effet à la banque) du jour de l'échéance, à laquelle le banquier peut ajouter (au titre de commission) un jour dit « jour de banque ». La base utilisée est la base commerciale (360 jours).

b. Les commissions

Proportionnelles ou fixes, elles permettent à la banque de se rémunérer. Ces commissions sont multiples (commissions d'endos, de services, d'acceptation,..), proportionnelles à la valeur nominale de l'effet ou fixes.

Aujourd'hui elles sont souvent forfaitaires.

**Pour résumer :**

- **Intérêts d'escompte** : calcul prorata temporis sur le montant brut de l'effet. Montant non soumis à la TVA. ;
- **Commissions d'endos** : calcul prorata temporis sur le montant brut de l'effet. Montant non soumis à la TVA. ;
- **Commissions de services, de manipulation, d'acceptation** etc.. : montant forfaitaire fixe soumis à la TVA

Exemple 8

Dans l'exemple 7, le commerçant paye 161,50 d'intérêts pour disposer de 8 078,50 pendant 55 jours. Calculer le taux du crédit. (*Rép. :  $t = 13,09\% = \frac{161,5}{8\,078,50} \times \frac{360}{55}$* ).

c. Le découvert

Définition : Le crédit consenti par la banque se matérialise ici par la position débitrice du compte courant du client de la banque. Les agios sont débités trimestriellement et sont composés :

- **Des intérêts  $I$**  =  $(\sum_{\text{trimestre}} \text{nombre débiteurs}) \times \frac{T_d}{360}$  où  $T_d$  est le taux de découvert,
- **De la commission du plus fort découvert** (en général commission forfaitaire à 0,050% sur le plus fort solde débiteur de chaque mois,
- **D'une éventuelle commission de confirmation**, calculée prorata temporis de l'ordre de 1,25% du montant du plafond de découvert autorisé lorsque ce dernier est confirmé par écrit qui engage la banque.

**En résumé**

- **Intérêts du découvert** : calculés en général sur le trimestre pour « coller » aux dates d'arrêts trimestriels, calculés sur le nombre réel de jour de découverts, sur les soldes réels journaliers.
- **Commissions d'endos** : calculée sur le plus fort découvert de chaque mois sans prorata temporis.
- **Commissions de confirmation** : calculée prorata temporis sur le montant de l'autorisation accordée par la banque.

→ Application : Exercice 7 de la fiche