Choix de portefeuille, MEDAF

(Capital Asset pricing Model)

1 Le principe de diversification

Dans le chapitre précédent nous avons décrit les principales caractéristiques du comportement "risquophobe". Cette modélisation nous a permis de mieux définir la notion de risque et même d'établir une gradation entre situations risquées. Ainsi, deux loteries ayant la même espérance, la première est plus risquée que la seconde si tout décideur risquophobe préfère la seconde.

L'objet de ce premier paragraphe est de donner un sens rigoureux à l'expression : "il ne faut pas mettre tous ses oeufs dans le même panier", qui est la traduction populaire du principe de diversification.

L'idée du principe de diversification est somme toute assez simple et repose sur un constat limpide : (sauf si elles sont parfaitement corrélées) la demi somme de deux variables aléatoires identiquement distribuées est moins risquée que chacune d'entre elles. Si on imagine deux paniers ayant chacun la même probabilité de tomber (et donc de provoquer la perte des oeufs), mettre un oeuf dans chaque panier est moins risqué que les mettre tous les deux dans l'un.

	00	10	01	11
1 oeuf dans chaque	2	1	1	0
2 oeufs dans l'un	2	0	2	0

On voit facilement que la première ligne est moins risquée que la seconde : les résultats sont différents uniquement dans le cas où l'événement "un seul des deux paniers tombe" se réalise. Si cet événement se produit, mettre un oeuf dans chaque panier est évidemment sans risque. Si $\widetilde{X}$ est la variable aléatoire donnant 1 si le premier panier reste intact et 0 s'il tombe, $\widetilde{Y}$ définie de la même manière pour le deuxième panier, on a $2\widetilde{X}$ et $2\widetilde{Y}$ sont plus risquées que $\widetilde{X}+\widetilde{Y}$.

Dans le cas de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées on peut énoncer le résultat général suivant :

Proposition 1 *si $\widetilde{x}_i$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, alors $\forall \alpha_i$, n nombres réels positifs de somme 1 ($\sum \alpha_i = 1$), $\frac{\sum \widetilde{x}_i}{n}$ est moins risquée que $\sum \alpha_i \widetilde{x}_i$. (et donc en particulier que chacune des $\widetilde{x}_i$)*

Evidemment la situation est légèrement plus complexe lorsque les variables aléatoires sont corrélées. Considérons d'abord deux variables aléatoires $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_2$ de même variance σ^2 mais non nécessairement indépendantes. Une étude de la variance permet de se faire une idée du risque d'une combinaison convexe des deux variables.

Considérons $t(\alpha)$:

$$t(\alpha) = \frac{\text{var}\,(\alpha\widetilde{x}_1 + (1-\alpha)\widetilde{x}_2)}{\sigma^2} = \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{\text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)}{\sigma^2}$$

$t(\alpha)$ est inférieur à 1, car $\text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) < \sigma^2$. Il est minimum pour $\alpha = 1/2$.

Si maintenant, $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_2$ n'ont pas la même variance, avec par exemple $\text{var}(\widetilde{x}_1) \leq \text{var}(\widetilde{x}_2)$. On peut calculer :

$$\Sigma^2(\alpha) = \text{var}\,(\alpha\widetilde{x}_1 + (1-\alpha)\widetilde{x}_2) = \alpha^2\text{var}(\widetilde{x}_1) + (1-\alpha)^2\text{var}\,(\widetilde{x}_2) + 2\alpha(1-$$

La dérivée de cette fonction vaut :
$\frac{d\Sigma^2}{d\alpha} = 2\alpha(\text{var}(\widetilde{x}_1) - cov(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)) - 2(1-\alpha)(\text{var}(\widetilde{x}_2) - \text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2))$

Il existe un minimum entre 0 et 1 si $\frac{d\Sigma^2}{d\alpha}(0) \leq 0 \leq \frac{d\Sigma^2}{d\alpha}(1)$, c'est à dire si

$$\text{var}\,(\widetilde{x}_2) - \text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \geq 0$$
$$\text{var}\,(\widetilde{x}_1) - \text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \geq 0$$

C'est à dire si

$$\text{var}\,(\widetilde{x}_1) - \text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \geq 0$$

Que l'on écrit :

$$\frac{\text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)}{\text{var}\,(\widetilde{x}_1)} \leq 1$$

$\frac{\text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)}{\text{var}(\widetilde{x}_1)}$ est appelé coefficient $\beta(\widetilde{x}_2/\widetilde{x}_1)$ de 2 par rapport à 1 : même si la variance de 2 est plus grande que celle de 1, une substitution de 2 à 1 permet de diminuer le risque de 1 si $\beta(\widetilde{x}_2/\widetilde{x}_1) \leq 1$. En terme de corrélation, si $\tau = \frac{\text{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)}{\sqrt{\text{var}(\widetilde{x}_1)\text{var}(\widetilde{x}_2)}}$ est le coefficient de corrélation, cela veut dire que $\tau\sqrt{var\,(\widetilde{x}_2)} \leq \sqrt{var\,(\widetilde{x}_1)}$ (Ceci est toujours vrai si $\tau \leq 0$). Dans ce cas une combinaison des deux actifs permet de diminuer le risque.

En revanche si tel n'est pas le cas il faut combiner les deux variables avec un coefficient négatif, c'est à dire vendre l'un des deux actifs à découvert.

2 Choix de portefeuille

Dans ce paragraphe on se propose d'analyser le problème de choix de portefeuille d'une manière générale.

Un investisseur a 1 euro à "placer", comment doit-il les répartir entre les différents actifs disponibles? Evidemment la réponse dépend de son attitude au risque. Nous allons supposer ici que notre investisseur utilise le critère "moyenne-variance", c'est à dire qu'il évalue $E(\widetilde{v})-\frac{1}{2}\theta\mathrm{var}(\widetilde{v})$ pour comparer les variables aléatoires.

On considère K actifs financiers, $k=1,...,K$. Le revenu de l'actif k est une variable aléatoire réelle $\widetilde{a}_k$: c'est le revenu (cash) aléatoire que procure cet actif dans le futur. Cette variable aléatoire est supposée connue grâce à des étude statistiques. On note p_k le prix, sur le marché, de l'actif k. Il est assez commode de définir le rendement de l'actif k comme la variable aléatoire qui mesure le revenu pour un euro investi : $\widetilde{R}_k=\frac{\widetilde{a}_k}{p_k}$. Il existe par ailleurs un actif sans risque, l'actif 0, qui rapporte R_0 (non aléatoire) euros par euro investi. Un portefeuille risqué est un vecteur z dont chaque composante z_k mesure la quantité d'actif k détenue.

Un portefeuille z procure donc un revenu aléatoire $\widetilde{v}=\sum\widetilde{a}_k\ z_k$ et coûte ${}^tzp$.

On peut écrire le revenu en fonction des rendements :

$$\widetilde{v}=\sum\frac{\widetilde{a}_k}{p_k}p_kz_k=\sum\widetilde{R}_kx_k={}^tx\widetilde{R}$$

Où $x_k=p_kz_k$ est la dépense affectée à l'achat de l'actif k.

Supposons que notre investisseur ait un euro à répartir entre les différents actifs. Il doit donc choisir de répartir cet euro entre l'actif sans risque (x_0) et les actifs risqués $x=(x_1,...x_K)$ avec[a] $x_0+{}^tx\mathbf{1}=1$. Cette stratégie lui rapporte pour cet euro, un revenu égal à $x_0R_0+{}^tx\widetilde{R}.=R_0+{}^tx(\widetilde{R}-R_0\mathbf{1})$.

On pose $\widetilde{\rho}=\widetilde{R}-R_0\mathbf{1}$, le vecteur des rendements excédentaires par rapport à l'actif sans risque. Le revenu de l'euro investi est donc égal à $\widetilde{v}=R_0+{}^tx\widetilde{\rho}$.

Le problème qui se pose pour cet investisseur est de choisir x de manière la plus rationnelle possible compte tenu de son attitude face au risque.

On peut étudier la stratégie (x_0,x) en fonction de son espérance (que rapporte-t-elle en moyenne) et de sa variance (quel risque comporte-t-elle).

On a :

$$\begin{cases} E(\widetilde{v})=R_0+{}^txE(\widetilde{\rho}) \\ \mathrm{var}(\widetilde{v})=E\left[(\widetilde{v}-E(\widetilde{v}))^2\right] \end{cases}$$

[a] $\mathbf{1}$ est le vecteur formés de K composantes toutes égales à 1

$$\begin{cases} \mathrm{var}(\widetilde{v})=E\left[({}^tx\widetilde{R}-{}^txE(\widetilde{R}))^2\right] \\ =E\left[{}^tx(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))x\right] \\ ={}^txE\left[(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))\right]x \end{cases}$$

Posons

$$\Omega=E\left[(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))\right]$$

Ω s'appelle la matrice (symétrique) de variance covariance des actifs son élément ij est égal à $\sigma_{ij}=E\left[(\widetilde{R}_i-E(\widetilde{R}_i))(\widetilde{R}_j-E(\widetilde{R}_j))\right]$. σ_{ij} est la covariance entre les actifs *i et j. La* formule ci dessus montre que cettre matrice symétrique est positive (la forme quadratique associée est positive : ${}^tx\Omega x$ est une variance, c'est-à-dire une moyenne de carrés).

Proposition 2 *En résumé, la stratégie* (x_0,x) *rapporte* $R_0+{}^txE(\widetilde{\rho})$ *en moyenne avec une variance égale à* ${}^tx\Omega x$.

Notation 3 *Dans la suite si* $\widetilde{v}$ *est une variable aléatoire, on note* v *son espérance. Ici* $\rho_i=E(\widetilde{\rho}_i)$, $R_i=E(\widetilde{R}_i)$.

Comment choisir entre toutes les stratégies possibles? Clairement de deux stratégies donnant la même espérance, n'importe quel investisseur risquophobe préfère la stratégie de variance minimale. Fixons donc à notre investisseur un rendement espéré m et cherchons les vecteurs x de $\mathbb{R}^K$ qui minimisent la variance parmi les x donnant donnant m comme rendement espéré. Considérons le problème d'optimisation (P) :

$$(P)\begin{cases} \min\limits_x({}^tx\Omega x) \\ {}^tx\rho=m-R_0 \end{cases}$$

Définissons le nouveau produit scalaire :

Definition 4 $<x,y>={}^tx\Omega y$ *est un produit scalaire (forme quadratique définie positive) notons* $\parallel x\parallel$, *la norme associée.*

Le problème devient :

$$(P)\begin{cases} \min\limits_x\parallel x\parallel \\ <\Omega^{-1}\rho,x>=m-R_0 \end{cases}$$

Cela consiste à trouver le point d'un hyperplan affine $(<\Omega^{-1}\rho,x>=m-R_0)$, qui est à la distance minimale de l'origine. Ce point est évidemment la projection orthogonale x^* de 0 sur cet hyperplan. *Il* est donc défini par les deux équations suivantes, d'inconnues x^* et λ :

$$\begin{cases} x^* = \lambda \Omega^{-1} \rho \\ < \Omega^{-1}\rho, x^* >= m - R_0 \end{cases}$$

La première exprime que x^* est colinéaire au vecteur normal à l'hyperplan $\Omega^{-1}\rho$, La seconde exprime que le point de projection appartient à cet hyperplan affine.

- Une remarque importante mérite d'être faite : x^* est un vecteur qui est proportionnel au vecteur $\Omega^{-1}\rho$ qui ne dépend pas de m. Autrement dit, quel que soit le rendement espéré demandé, la structure du portefeuille risqué est identique. Par structure on entend la proportion relative des différents actifs risqués.

- Bien sûr on peut facilement résoudre le système précédent :

$$x^* = \frac{(m - R_0)}{{}^t\rho\Omega^{-1}\rho}\Omega^{-1}\rho$$

- Comment notre investisseur choisit-il le niveau m? Evidemment ceci résulte de son arbitrage entre moyenne et variance, il s'agit de maximiser en m :

$$E(\widetilde{v}) - \frac{1}{2}\theta var(\widetilde{v}) = m - \frac{1}{2}\theta(m - R_0)^2 \frac{1}{{}^t\rho\Omega^{-1}\rho}$$

Definition 5 *On appelle portefeuille de marché le portefeuille* $x^m = \frac{\Omega^{-1}\rho}{{}^t\mathbf{1}\Omega^{-1}\rho} = \mu\Omega^{-1}\rho$, *portefeuille qui ne comporte que des actifs risqués dans les proportions relatives définies par les solutions des problèmes* (P).

Le rendement de ce portefeuille est noté : $\widetilde{R}_m = R_0 + {}^t x^m \widetilde{\rho}$,

La variance de son rendement est :

$$var(\widetilde{R}_m) = {}^t x^m \Omega x^m$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} (\Omega x^m)_i &= \sum_j \sigma_{ij} x_j^m \\ &= cov(\widetilde{R}_i, \sum \widetilde{R}_j x_j^m) \\ &= cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m) \end{aligned}$$

Ce portefeuille s'appelle portefeuille de marché parce que, sous l'hypothèse d'investisseurs "moyenne-variance", ce qui précède montre que tous les individus demandent un portefeuille dont la composante risquée est proportionnelle à ce portefeuille. Il en résulte, que la somme de tous les portefeuilles détenus a la même structure (dans sa partie risquée). Bien sûr, un individu très risquophobe demandera peu de ce portefeuille risqué et concentrera son investissement sur l'actif sans risque. Au contraire, un individu moins risquophobe choisira un x_0 plus petit. Tout se passe comme si chaque investisseur achetait un morceau de la capitalisation boursière totale, morceau plus ou moins grand selon l'aversion!

3 Formule du MEDAF

Ce qui précède permet de trouver une des formules les plus célèbres de la finance!

On a :

$$\begin{aligned} \Omega x^m &= \mu\rho \\ var(\widetilde{R}_m) &= {}^t x^m \Omega x^m = \mu {}^t x^m \rho = \mu(R_m - R_0) \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\frac{\Omega x^m}{var(\widetilde{R}_m)}(R_m - R_0) = \rho$$

Ce qui s'écrit, composante par composante :

$$\frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{var(\widetilde{R}_m)}(R_m - R_0) = (R_i - R_0)$$

Proposition 6 *Pour n'importe quel actif i, sa surperformance moyenne par rapport à l'actif sans risque* $R_i - R_0$ *est proportionnelle à la surperformance du portefeuille de marché* $R_m - R_0$. *Le coefficient de proportionalité est le* β *de* i *par rapport au portefeuille de marché.*

$$\begin{aligned} R_i - R_0 &= \beta_i(R_m - R_0) \\ \beta_i &= \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{var(\widetilde{R}_m)} \end{aligned}$$