Ecole des HEC
Université de Lausanne

FINANCE EMPIRIQUE

INSTITUTE OF BANKING AND FINANCE
INSTITUT DE BANQUE ET FINANCE

Eric Jondeau

FINANCE EMPIRIQUE

Test du MEDAF

Eric Jondeau

Motivation

Le MEDAF est l'un des modèles d'évaluation des prix des actifs financiers les plus célèbres.

- Le rendement anticipé d'un actif financier dépend du rendement anticipé du portefeuille de marché, avec un paramètre (le bêta) constant dans le temps.
- Plusieurs tests du MEDAF ont été proposés dans la littérature, fondés sur
  - Des séries temporelles des rendements
  - Des séries en coupe instantanée
  - Les deux dimensions à la fois.
- Tous ces tests soulèvent un certain nombre de problèmes économétriques
  - Certains régresseurs sont estimés
  - Les termes d'erreur sont non-normaux et leur distribution varie dans le temps.
- Le MEDAF a d'importantes conséquences pour les gestions des actifs.

Objectifs de ce chapitre :

- Tester le MEDAF à partir de différentes approches
- Analyser certains problèmes économétriques
- Evaluation de portefeuilles.

Présentation du MEDAF

Il y a 3 étapes dans la mise en place du MEDAF :

1. Le MEDAF est fondé sur l'analyse du problème de **sélection du portefeuille optimal** de **Markowitz** (1959) : Les investisseurs qui adoptent un critère d'optimisation de la composition de leur portefeuille vont détenir un **portefeuille efficient**, c'est-à-dire le portefeuille dont le rendement est maximal et la variance minimale.

2. Tobin a montré que l'investisseur peut décomposer la démarche d'allocation de son portefeuille en deux temps (**Théorème de séparation des fonds d'investissement**) :

1. il choisit le meilleur portefeuille d'actifs risqués
2. il combine ce portefeuille avec l'actif sans risque de façon à obtenir le niveau de risque qu'il désire.

Si les investisseurs ont des anticipations homogènes, ils vont tous détenir le même portefeuille d'actifs risqués.

Présentation du MEDAF

3. Treynor, **Sharpe** et **Lintner** ont étudié les **implications en termes d’équilibre** : C’est le **Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers** (MEDAF) ou ***Capital Asset Pricing Model*** (CAPM). Cette relation s'écrit sous la forme d’une relation linéaire entre l’excès de rendement du titre et l’excès de rendement du portefeuille de marché :

$$\underbrace{E[r_{i,t}]-r_f}_{\text{Prime de risque de l'actif}} = \underbrace{\beta_i}_{\text{beta de l'actif}} \times \underbrace{(E[r_{m,t}]-r_f)}_{\text{Prime de risque du marché}}$$

où le bêta de l’actif est défini comme le rapport entre la covariance entre le rendement du titre et le rendement du portefeuille de marché et la variance du portefeuille de marché :

$$\beta_i = \frac{Cov[r_{i,t}, r_{m,t}]}{V[r_{m,t}]}$$

Présentation du MEDAF

Le bêta de l'actif *i* mesure comment le rendement de l'actif *i* est affecté par un changement dans le rendement du portefeuille de marché. Si on considère la régression suivante

$$r_{i,t} = a_i + b_i r_{m,t} + u_{i,t}$$

avec $u_{i,t}$ non corrélé avec $r_{m,t}$, soit $Cov[r_{m,t}, u_{i,t}] = 0$, alors on a par construction

$$V[r_{i,t}] = \beta_i^2 V[r_{m,t}] + V[u_{i,t}] \qquad \text{ou} \qquad \sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{u_i}^2$$

Le risque total de l'actif *i* (σ_i^2) est la somme du risque systématique ($\beta_i^2 \sigma_m^2$), c'est-à-dire corrélé avec le risque du marché, et du risque spécifique ($\sigma_{u_i}^2$).

Présentation du MEDAF

Le cas avec actif sans risque (MEDAF standard)

Sharpe et Lintner supposent qu'il est possible d'emprunter et de prêter à un taux d'intérêt sans risque (**MEDAF standard**).

Cette version du MEDAF s'écrit sous la forme, bien connue

$$E[r_{i,t}] = r_{f,t} + \beta_i (E[r_{m,t}] - r_{f,t}) \qquad i = 1,\dots,N \tag{1}$$

ou en termes d'excès de rendement,

$$E[z_{i,t}] = \beta_i E[z_{m,t}] \qquad i = 1,\dots,N \tag{2}$$

où $\beta_i = \dfrac{Cov[r_{i,t}, r_{m,t}]}{V[r_{m,t}]} = \dfrac{Cov[z_{i,t}, z_{m,t}]}{V[z_{m,t}]}$

$r_{m,t}$ le rendement du portefeuille de marché, $r_{f,t}$ le rendement de l'actif sans risque

$z_{i,t} = r_{i,t} - r_{f,t}$ et $z_{m,t} = r_{m,t} - r_{f,t}$.

Présentation du MEDAF

Le cas avec actif sans risque (MEDAF standard)

La prime de risque sur l'actif i, $E[z_{i,t}]$, ne dépend que du coefficient bêta du titre β_i, avec un facteur de proportionnalité égal à la prime de risque du portefeuille de marché, $E[z_{m,t}]$. Ce facteur de proportionnalité est **le même pour tous les actifs** $i = 1, ..., N$.

Difficulté : ni β_i ni la prime de risque du marché $E[z_{m,t}]$ ne sont observables.

Si $r_{f,t}$ est traité comme non aléatoire, les deux écritures sont équivalentes.

Dans les travaux empiriques, les variables retenues pour mesurer le taux sans risque sont traitées comme aléatoires et les bêtas issus des deux spécifications (1) et (2) peuvent différer.

Présentation du MEDAF

Le cas avec actif sans risque (MEDAF standard)

Les tests empiriques du MEDAF standard ont porté sur **trois implications** :

1. La constante est nulle dans l'équation $E[z_{i,t}] = \alpha_i + \beta_i E[z_{m,t}]$;

2. Le coefficient bêta capture complètement la variation des primes de risque $E[z_{i,t}]$ entre les titres ;

3. La prime de risque du portefeuille de marché $E[z_{m,t}]$ est positive.

Présentation du MEDAF

Le cas sans actif sans risque (MEDAF zéro-bêta)

Black (1972) a proposé une version plus générale du MEDAF, qui ne nécessite par d'actif sans risque. L'excès de rendement anticipé de l'actif i par rapport au rendement du portefeuille zéro-bêta dépend linéairement de son bêta :

$$E[r_{i,t}] = E[r_{0m,t}] + \beta_i (E[r_{m,t}] - E[r_{0m,t}]) \qquad i = 1,\ldots,N$$

où $E[r_{0m,t}]$ est le rendement du portefeuille zéro-bêta associé au portefeuille de marché.

Le portefeuille zéro-bêta est le portefeuille qui a la plus petite variance parmi tous les portefeuilles qui sont non corrélés avec le portefeuille de marché. (Tout autre portefeuille non corrélé avec le portefeuille de marché aurait le même rendement anticipé, mais une variance supérieure).

Présentation du MEDAF

Le cas sans actif sans risque (MEDAF zéro-bêta)

L'analyse économétrique du modèle de Black traite le rendement du portefeuille zéro-bêta comme une quantité non observable, ce qui complique un peu l'analyse par rapport au modèle de Sharpe et Lintner.

Si on considère le modèle de marché suivant :

$$E[r_{i,t}] = \alpha_i + \beta_i E[r_{m,t}] \qquad i = 1,\ldots,N$$

le modèle de Black impose les contraintes suivantes :

$$\alpha_i = E[r_{0m,t}](1-\beta_i) \qquad \forall i = 1,\ldots,N$$

Remarque : Il s'agit en fait d'un modèle à 2 facteurs : $E[r_{m,t}]$ et $E[r_{0m,t}]$.

Tests du MEDAF

L'approche par les séries temporelles

Le MEDAF est un modèle à une période : il ne dit rien sur la dynamique des rendements. Pour l'analyse économétrique, il faut donc ajouter des hypothèses concernant la dynamique des rendements. Simplement, on suppose que les rendements sont iid.

C'est bien sûr une hypothèse très forte, mais c'est théoriquement cohérent avec un MEDAF qui prévaudrait période par période. C'est aussi une approximation empirique du comportement des rendements à une fréquence mensuelle.

On se concentre tout d'abord sur le modèle de Sharpe et Lintner et plus précisément sur la 1$^{\text{ère}}$ implications du modèle, à savoir que la constante de la régression est nulle.

Tests du MEDAF

L'approche par les séries temporelles

Une première stratégie, intuitive, pour tester le MEDAF consiste à utiliser l'approche séries temporelles uniquement. Cette approche a été suivie initialement par Black, Jensen et Scholes (1972). Elle est fondée sur la régression suivante :

$$z_{i,t} = \alpha_i + \beta_i z_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \qquad t = 1,...,T$$

pour chaque actif séparément, avec $z_{i,t} = r_{i,t} - r_{f,t}$ et $z_{m,t} = r_{m,t} - r_{f,t}$.

Alors, on pourrait tester l'hypothèse nulle $H_0 : \alpha_i = 0$ pour tous les actifs à partir de l'estimation par les MCO : il suffit pour cela d'utiliser la t-stat

$$t[\hat{\alpha}_i] = \frac{\hat{\alpha}_i}{\sqrt{\hat{V}[\hat{\alpha}_i]}} \qquad \text{avec} \qquad V[\hat{\alpha}_i] = \sum_{t=1}^{T} d_t^2 V[\varepsilon_{i,t}] = \frac{1}{T}\left(1 + \frac{\bar{z}_m^2}{\sigma_{z_m}^2}\right)\sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Sous l'hypothèse nulle, on sait que la *t*-stat $t[\hat{\alpha}_i]$ est distribuée comme une distribution de Student $t_{(T-2)}$.

Tests du MEDAF

L'approche par les séries temporelles

Exemple pour 3 titres du SMI à partir de données quotidiennes sur la période 1988-2004.

	Roche	Swatch	UBS
$\hat{\alpha}_i$	0,0292	0,0310	0,0027
$s_{\hat{\alpha}_i}$	0,0142	0,0247	0,0176
$t(\hat{\alpha}_i)$	2,0536	1,2541	0,1556
$\hat{\beta}_i$	0,9014	0,8941	1,0932
$s_{\hat{\beta}_i}$	0,0248	0,0365	0,0307
$t(\hat{\beta}_i)$	36,4094	24,5251	35,6312

Tests du MEDAF

L'approche par les séries temporelles

En fait, le MEDAF est un modèle beaucoup plus restrictif : **tous les coefficients α_i devraient être conjointement égaux à 0**. L'hypothèse nulle du MEDAF est donc $H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_N = 0$, est l'hypothèse alternative s'écrit $H_a : \exists i$ tel que $\alpha_i \neq 0$.

Si les estimations des paramètres α_i étaient indépendantes, il suffirait de comparer les *t*-stat obtenues pour chaque α_i avec la distribution théorique (distribution de Student).

Le problème est que les estimations des α_i ne sont pas indépendantes. La raison est que les termes d'erreur $\varepsilon_{i,t}$ ne sont pas nécessairement indépendants les uns des autres, c'est-à-dire $Cov[\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{j,t}] \neq 0$ pour $i \neq j$.

Deux solutions peuvent être adoptées pour résoudre ce problème :

1. le regroupement des titres sous forme de portefeuilles ;
2. le test joint de l'ensemble des paramètres α_i.

Tests du MEDAF

L'approche par les séries temporelles

Le regroupement des titres sous forme de portefeuilles

Comme le problème vient du fait que les termes d'erreur sont corrélés entre eux, une solution consiste à regrouper les titres. Pour cela, on peut se constituer des portefeuilles à partir des titres individuels et estimer la relation suivante pour un portefeuille *p* donné

$$z_{p,t} = \alpha_p + \beta_p z_{m,t} + \varepsilon_{p,t} \qquad t = 1,\ldots,T$$

où $z_{p,t}$ est simplement la moyenne des excès de rendement des titres inclus dans le portefeuille. $\hat{\beta}_p$ est le risque moyen des titres individuels et $\hat{\alpha}_p$ la constante moyenne.

Les portefeuilles sont constitués sur la base des coefficients $\hat{\beta}_i$ estimés sur une période passée, de façon à regrouper des titres ayant des caractéristiques proches.

Exemple : Test du CAPM à partir des rendements mensuels sur 35 ans (1931-65) et de 10 portefeuilles (P1 contient les titres les plus risqués et P10 les moins risqués).

Tests du MEDAF

L'approche par les séries temporelles

	P1	P5	P10
$\hat{\alpha}_i$ $(\times 100)$	−0,829	−0,543	2,012
$t(\hat{\alpha}_i)$	−0,427	−0,887	1,868
$\hat{\beta}_i$	1,561	1,057	0,499
$Corr[z_{p,t}, z_{m,t}]$	0,963	0,992	0,898
$\sigma(\varepsilon_{p,t})$ (en %)	3,93	1,24	2,18

Source : Black, Jensen et Scholes (1972), *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests, Studies in the Theory of Capital Markets*.

Remarques : $\hat{\alpha}_p$ est négatif pour les portefeuilles risqués ($\hat{\beta}_p > 1$) et positif pour les portefeuilles peu risqués ($\hat{\beta}_p < 1$). Donc les titres risqués ont eu tendance à gagner moins en moyenne au cours de la période et les titres peu risqués à gagner plus. Toutefois, les t-stat sont peu significatives. Donc le rejet du MEDAF est peu marqué.

Tests du MEDAF

L'approche cross-section

Le problème de l'approche par les séries temporelles est qu'elle ne permet pas de tester un ensemble large d'implications du MEDAF. En particulier, elle ne dit rien sur le fait que le rendement de tous les titres doit réagir de la même façon au facteur bêta. Pour cette raison, une approche plus complète a été développée. Elle se fonde sur la combinaison de la dimension temporelle (pour estimer le coefficient bêta) et de la dimension des titres.

La première étape (dimension temporelle) consiste à estimer les coefficients bêta, pour chaque actif *i* séparément, en supposant que les bêta sont constants dans le temps

$$z_{i,t} = \alpha_i + \beta_i z_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \qquad t = 1,\ldots,T$$

Le terme α_i a été ajouté dans cette spécification, alors qu'il doit être égal à 0 selon le MEDAF. On s'attend donc à ce que $\alpha_i = 0$ pour tout actif *i*.

Cette première étape nous donne une estimation $\hat{\beta}_i$ de β_i.

Tests du MEDAF

L'approche cross-section

2. La deuxième étape (dimension cross-section) consiste à régresser les excès de rendement sur les bêta. Pour chaque actif *i*, on calcule les **excès de rendement moyens** $\bar{z}_i = \bar{r}_i - \bar{r}_f$, i = 1, ..., N. On estime alors la régression suivante

$$\bar{z}_i = \psi_0 + \psi_1 \hat{\beta}_i + v_i \qquad i = 1,\ldots,N$$

où $\hat{\beta}_i$ est l'estimation obtenue lors de la première étape.

Si le MEDAF est valide, on s'attend à ce que $\psi_0 = 0$ et $\psi_1 = \bar{z}_m = \bar{r}_m - \bar{r}_f$, c'est-à-dire l'excès de rendement moyen du portefeuille de marché.

Par exemple, le test de l'hypothèse nulle $H_0 : \psi_0 = 0$ est fondé sur la *t*-stat

$$t(\hat{\psi}_0) = \frac{\hat{\psi}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_0}}$$ qui suit sous H_0 une distribution de Student $t_{(T-2)}$.

Tests du MEDAF

L'approche cross-section − problème d'erreur dans les variables

L'estimation dans la dimension cross-section ne tient pas compte du fait que le régresseur $\hat{\beta}_i$ a été **estimé** dans la première étape. Il s'agit d'un problème d'erreur dans les variables. Il implique un biais dans l'estimation de la variance de $\hat{\psi}_0$ et $\hat{\psi}_1$.

Supposons pour voir cela que le coefficient bêta estimé $\hat{\beta}_i$ s'écrit sous la forme :

$$\hat{\beta}_i = \beta_i + u_i$$

où l'erreur de mesure u_i est un processus iid normal ($E[u_i] = 0$, $Var[u_i] = \sigma_u^2$ et $Cov[u_i, u_j] = 0$ si $i \neq j$).

La relation estimée est donc de la forme suivante :

$$\bar{z}_i = \psi_0 + \psi_1 \hat{\beta}_i + \tilde{v}_i \qquad i = 1,\ldots,N$$

avec $\tilde{v}_i = v_i - \psi_1 u_i$

Tests du MEDAF

L'approche cross-section − problème d'erreur dans les variables

Quel est le biais dans l'estimation de ψ_0 et ψ_1 quand on utilise $\hat{\beta}_i$ au lieu de β_i ?

Pour voir cela, supposons que l'erreur de mesure u_i n'est pas corrélée à l'erreur spécifique v_i. Dans ce cas, l'estimateur des MCO de ψ_1 s'écrit, comme d'habitude :

$$\hat{\psi}_1 = \frac{Cov[\hat{\beta}_i, \bar{z}_i]}{Var[\hat{\beta}_i]} = \frac{Cov[\beta_i + u_i, \psi_0 + \psi_1\beta_i + v_i]}{Var[\beta_i + u_i]} = \frac{Cov[\beta_i, \psi_1\beta_i]}{Var[\beta_i) + Var[u_i]} = \frac{\psi_1 Var[\beta_i]}{Var[\beta_i] + Var[u_i]}$$

soit finalement

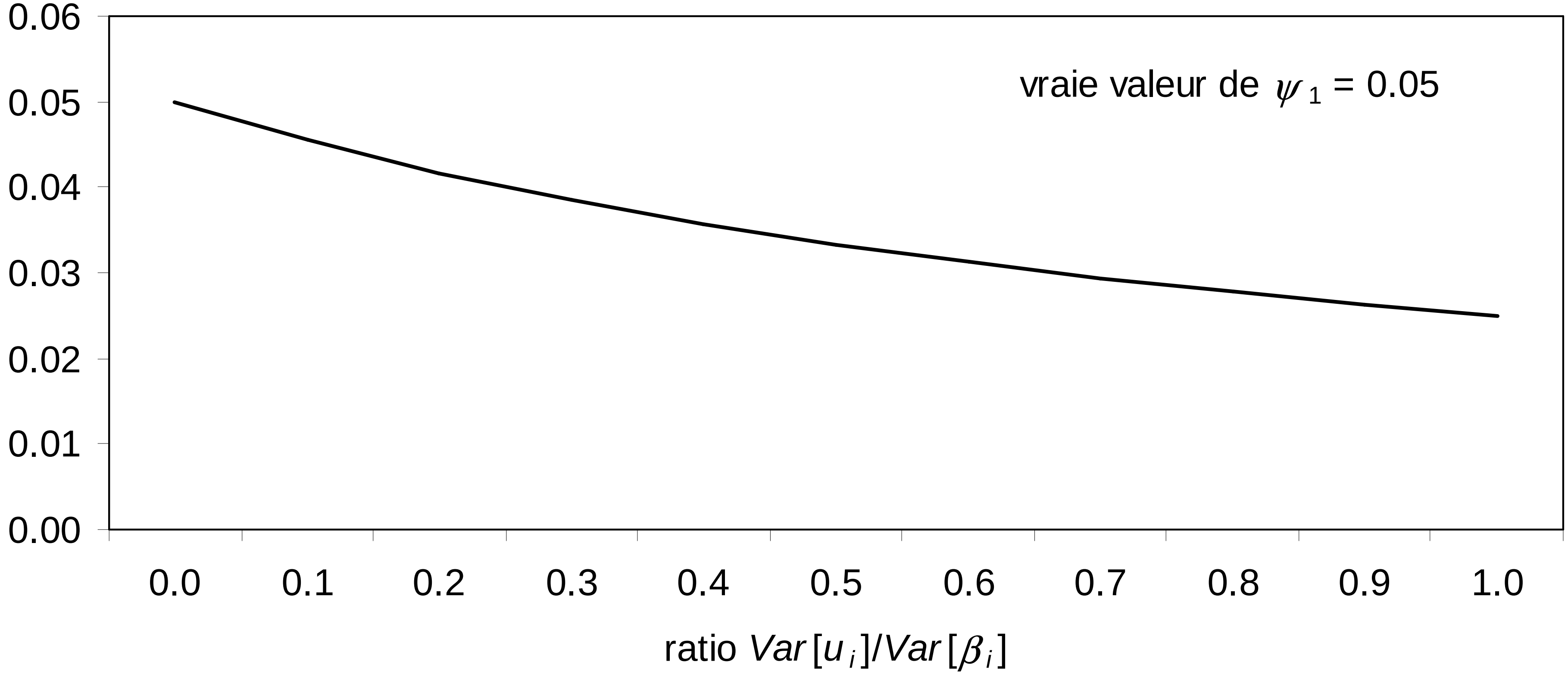
$$\hat{\psi}_1 = \frac{\psi_1}{1 + Var[u_i]/Var[\beta_i]}$$

Comme $Var[u_i]/Var[\beta_i] \in [0;1]$, l'estimateur $\hat{\psi}_1$ est biaisé vers le bas.

Tests du MEDAF

L’approche cross-section − problème d’erreur dans les variables

Estimateur de ψ_1
dans le cas d'une erreur sur la variable



Tests du MEDAF

L'approche cross-section − problème d'erreur dans les variables

Il est important de noter que même pour un grand échantillon, tant que la variance de l'erreur de mesure est positive, le paramètre estimé $\hat{\psi}_1$ est biaisé vers le bas.

Comme l'estimateur des MCO de ψ_0 s'écrit $\hat{\psi}_0 = \bar{z}_i - \hat{\psi}_1 \hat{\beta}_i$, on en déduit qu'il est biaisé vers le haut.

On en déduit finalement que le test des hypothèses nulles $\psi_0 = 0$ et $\psi_1 = \bar{z}_m = \bar{r}_m - \bar{r}_f$ donnera en général des conclusions erronées.

Solution : le regroupement des titres sous forme de portefeuilles (le retour !).

(**Remarque** : dans l'approche série temporelle, le regroupement vise à tenir compte de la covariance entre les erreurs des différents titres. Ici, il doit tenir compte de la covariance entre l'erreur de mesure et l'erreur spécifique).

Tests du MEDAF

L'approche cross-section − problème d'erreur dans les variables

Comme précédemment, l'idée est de se constituer des portefeuilles de titres présentant des caractéristiques similaires en termes de coefficient bêta. Autrement dit, on trie les titres selon la valeur de leur coefficient bêta estimé sur une période passée. On découpe l'ensemble des titres en 10 groupes. Le premier portefeuille est constitué du premier décile de titres ayant les plus petits bêta. Le dernier portefeuille est constitué du dernier décile de titres ayant les plus grands bêta. Cette procédure assure que les paramètres estimés $\hat{\psi}_0$ et $\hat{\psi}_1$ sont virtuellement sans biais.

Exemple : Test du CAPM à partir des rendements mensuels sur 35 ans (1931-65) et de 10 portefeuilles (P1 contient les titres les plus risqués et P10 les titres les moins risqués). On estime la régression suivante pour un portefeuille *p* donné

$$\bar{z}_p = \psi_0 + \psi_1 \hat{\beta}_p + v_p \qquad p = 1,...,10$$

et on s'attend à ce que $\psi_0 = 0$ et $\psi_1 = \bar{z}_m$.

Tests du MEDAF

L'approche cross-section − problème d'erreur dans les variables

La régression menée sur l'ensemble de la période donne les estimations suivantes :

$\hat{\psi}_0$	0,00359
$t(\hat{\psi}_0)$	6,52
$\hat{\psi}_1$	0,0108
$\psi_1 = \bar{z}_m$	0,0142
$t(\hat{\psi}_1 - \psi_1)$	6,53

Source : Black, Jensen et Scholes (1972), *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests, Studies in the Theory of Capital Markets*.

Les deux hypothèses nulles $\psi_0 = 0$ et $\psi_1 = \bar{z}_m = \bar{r}_m - \bar{r}_f$ sont très nettement rejetées par les données.

Tests du MEDAF

L'approche séries temporelles : le modèle de Black

Revenons au modèle de Black, qui ne suppose pas l'existence d'un taux sans risque

$$E[r_{i,t}] = E[r_{0m,t}](1-\beta_i) + E[r_{m,t}]\beta_i \qquad i = 1,\ldots,N$$

Dans l'approche par les séries temporelles, ce modèle s'écrit sous la forme

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \qquad t = 1,\ldots,T$$

avec l'implication suivante du MEDAF : $\alpha_i = E[r_{0m,t}](1-\beta_i)$.

Cette implication est plus compliquée à tester que le test de $H_0 : \alpha = 0$ dans le modèle de Sharpe et Lintner : les paramètres β_i et $E[r_{0m,t}]$ rentrent de façon **non-linéaire**. Plus précisément, le test porte donc sur l'hypothèse suivante :

$$H_0 : \alpha_1 = \gamma(1-\beta_1),\ldots,\alpha_N = \gamma(1-\beta_N) \qquad \text{avec } \gamma = E[r_{0m,t}]$$
$$H_a : \exists i \ \text{tel que}\ \alpha_i = \gamma(1-\beta_i).$$

Tests du MEDAF

L'approche cross-section − le modèle de Black

Plutôt que de mettre en place ce test compliqué dans la dimension série temporelle, on peut poursuivre la démarche cross-section. Une fois estimés les paramètres $\hat{\beta}_i$ dans la dimension temporelle, on peut estimer le modèle sous la forme

$$\bar{r}_i = \psi_0 + \psi_1 \hat{\beta}_i + v_i \qquad i = 1,\ldots,N$$

Dans cette version du MEDAF, on doit avoir $\psi_0 = \bar{r}_{0m}$ et $\psi_1 = \bar{r}_m - \bar{r}_{0m}$.

Evidemment, comme le taux zéro-bêta $\bar{r}_{0m}$ est inconnu, ce modèle est beaucoup plus flexible vis-à-vis du MEDAF. Ce qu'on peut tester, c'est $H_0 : \psi_0 + \psi_1 = \bar{r}_m$. La statistique de test est

$$t(\hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_1 - \bar{r}_m) = \frac{\hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_1 - \bar{r}_m}{\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_1}} \qquad \text{avec} \qquad \hat{\sigma}^2_{\hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_1} = \hat{\sigma}^2_{\hat{\psi}_{01}} + \hat{\sigma}^2_{\hat{\psi}_1} + 2Cov[\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1]$$

qui suit sous H_0 une distribution de Student $t_{(T-2)}$.

De fait, en général, on ne rejette plus le MEDAF lorsqu'il est spécifié de cette façon.

Tests du MEDAF

L'approche cross-section de Fama et MacBeth (1973)

Il est possible d'aller encore un peu plus loin dans les implications du MEDAF. En effet, ce modèle implique que seul le paramètre bêta doit influencer l'évolution du rendement d'un titre.

Fama et MacBeth ont proposé d'ajouter certaines variables dans l'explication du rendement d'un portefeuille donné et de tester si ces variables additionnelles jouent un rôle significatif. Ils considèrent alors la régression cross-section suivante :

$$\bar{r}_p = \psi_0 + \psi_1 \hat{\beta}_p + \psi_2 \hat{\beta}_p^2 + \psi_3 \hat{s}_p(\hat{\varepsilon}_i) + u_p \qquad p = 1,\ldots,N$$

Sous l'hypothèse nulle que le MEDAF est valide, on doit avoir $\psi_0 = \bar{r}_{0m}$, $\psi_1 = \bar{r}_m - \bar{r}_{0m}$ et $\psi_2 = \psi_3 = 0$.

- Si $\psi_2 \neq 0$, alors il existe des non-linéarités dans la relation du MEDAF
- Si $\psi_3 \neq 0$, alors le risque diversifiable affecte le rendement anticipé du portefeuille.

Dans les deux cas, il s'agit d'un rejet du MEDAF.

Tests du MEDAF

L'approche cross-section de Fama et MacBeth (1973)

Résultats empiriques : Fama et MacBeth estiment leur modèle sur la période 1935-68, en répétant le même exercice chaque mois, de façon à observer comment les paramètres $(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ varient au cours du temps.

Ils obtiennent qu'en moyenne les paramètres ψ_2 et ψ_3 ne sont pas significativement différents de 0 et que le terme d'erreur u_p n'est pas autocorrélé au cours de la période.

Ces différents résultats sont globalement favorables au MEDAF.

Evaluation des performances

Mesures de performance

Pourquoi évaluer les performances ?

- pour évaluer les gestionnaires de fonds (pour les responsables des fonds)
- pour sélectionner les actifs financiers (pour les investisseurs)

Les mesures de performance les plus connues sont le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor et l'indice de Jensen. Typiquement, ces mesures sont calculées sur de longues périodes. Le fonds avec la mesure la plus élevée est considéré comme le meilleur.

Dans les années 1960, l'hypothèse de marché efficient était assez largement acceptée. On considérait que les prix incorporaient toute l'information si rapidement et efficacement qu'un investisseur non informé devrait dégager le même rendement qu'un expert.

Les premières études sur la capacité des fonds d'investissement à dégager de meilleures performances que le marché ont conclu que les fonds n'étaient pas en fait capables de sélectionner plus efficacement les titres que les autres investisseurs (Treynor, 1965, Sharpe, 1966, Jensen, 1968).

Evaluation des performances

MEDAF et mesures de performance

Le MEDAF prédit que sous certaines hypothèses restrictives :

- tous les agents ont des anticipations homogènes
- les agents déterminent leur portefeuille en maximisant le critère espérance-variance
- les agents peuvent emprunter ou prêter des montants illimités au taux sans risque
- le marché est à l'équilibre à tout instant

les primes de risque, ajustées pour la composante systématique du risque $(E[r_i]-r_f)/\beta_i$ doivent être les mêmes pour tous les titres

$$\frac{E[r_1]-r_f}{\beta_1}=\frac{E[r_2]-r_f}{\beta_2}=...=E[r_m]-r_f$$

Evaluation des performances

MEDAF et mesures de performance

En réalité, le marché peut très bien ne pas être à l'équilibre pendant de courtes périodes pendant lesquelles il peut exister des opportunités de profits. Par exemple, les agents peuvent avoir des anticipations divergentes. Il est alors intéressant de pouvoir classer les performances de différents actifs par rapport à un **indice de performance global**. Un tel indice permettrait de mesurer les rendements observés par rapport à une situation d'équilibre.

Cette question sur les mesures de performance est particulièrement importante dans un domaine de la Finance, les fonds d'investissement. Un fonds d'investissement permet aux gérants d'investir dans un nombre important de titres, de façon à optimiser les performances du fonds. Ce qui intéresse les investisseurs individuels est alors de savoir si les performances d'un fonds donné sont meilleures que les performances du portefeuille de marché ou d'une sélection aléatoire des titres. Cette question est importante si les performances futures d'un fonds sont corrélées aux performances passées du fonds. (Cette relation n'a toutefois pas encore été établie fermement.)

Evaluation des performances

MEDAF et mesures de performance − Indice de Sharpe

L'indice de performance de Sharpe pour un portefeuille p est défini comme l'excès de rendement moyen sur la période [1 , T] divisé par l'écart-type

$$\hat{S}_p = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\hat{\sigma}_p}$$

où $\bar{r}_p = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{p,t}$ et $\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (r_{p,t} - \bar{r}_p)^2$.

Le gestionnaire de fonds sera considéré comme plus performant qu'une stratégie de sélection aléatoire si la valeur de l'indice de Sharpe du fonds est supérieure à la valeur de l'indice de Sharpe du portefeuille de titres sélectionnés de façon aléatoire.

Le ratio de Sharpe suppose que toutes les composantes du risque du portefeuille doivent être rémunérées, alors que le MEDAF montre que seul le risqué systématique doit être rémunéré (puisque le risque spécifique peut être annulé par diversification).

Evaluation des performances

MEDAF et mesures de performance − Indice de Treynor

L'indice de performance de Treynor est défini par

$$\hat{T}_p = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\hat{\beta}_p}$$

où $\hat{\beta}_p = \hat{\sigma}_{pm} / \hat{\sigma}_m^2$ représente le risque systématique du fonds, c'est-à-dire le risque qui ne peut pas être diversifié en ajoutant un actif supplémentaire dans le fonds.

Selon le MEDAF, l'indice de Treynor devrait être le même pour tous les fonds quand le marché est à l'équilibre.

On devrait donc investir dans des fonds dont l'indice de Treynor est supérieur à l'excès de rendement du portefeuille de marché.

Evaluation des performances

MEDAF et mesures de performance − Indice de Jensen

L'indice de Jensen mesure l'écart d'un portefeuille par rapport à la droite du marché des titres. Il est obtenu comme la constante α_p dans le modèle de marché suivant :

$$r_{p,t} - r_{f,t} = \alpha_p + \beta_p (r_{m,t} - r_{f,t}) + \varepsilon_{p,t} \qquad t = 1,\ldots,T$$

Un fonds est capable de dégager un excès de rendement supérieur au MEDAF si $\hat{\alpha}_p$ est positif. L'indice de Jensen mesure le rendement anormal du fonds d'investissement.

L'indice de Jensen ne permet pas de distinguer entre la capacité à sélectionner des titres (*stock-picking ability*) et la capacité à prévoir l'évolution du rendement du portefeuille de marché (*market timing*). Treynor and Mazuy (1966) ont proposé la régression quadratique suivante :

$$r_{p,t} - r_{f,t} = \alpha_p + \beta_p (r_{m,t} - r_{f,t}) + \delta_p (r_{m,t} - r_{f,t})^2 + \varepsilon_{p,t} \qquad t = 1,\ldots,T$$

où δ_p mesure la capacité à prévoir l'évolution du rendement du portefeuille de marché. Ce paramètre est positif si le gestionnaire augmente son paramètre bêta quand il reçoit un signal positif concernant l'évolution du marché.

Evaluation des performances

Résultats empiriques

Plusieurs études ont mesuré les performances des fonds d'investissement en utilisant ces différentes mesures :

Shawky (1982): Performance de 255 fonds au cours de la période 1973-77.

- Même classement pour les 3 indices. C'est lié surtout à la forte corrélation entre σ_p et β_p pour chaque fonds.
- En utilisant l'indice de Sharpe, entre 15 et 20% des fonds ont de meilleures performances qu'un portefeuille aléatoire.
- Pour l'indice de Treynor, les résultats sont un peu meilleurs avec 33% de fonds réalisant de meilleures performances qu'un portefeuille aléatoire.
- L'indice de Jensen est significativement différent de 0 pour seulement 25 des 255 fonds, 16 avec un $\hat{\alpha}_p$ négatif, 9 avec un $\hat{\alpha}_p$ positif.