Calcul du portefeuille tangent *T* (modèle de Markowitz)

Supposons un portefeuille composé de 4 actions.
Soit $\boldsymbol{R}$ le vecteur des rentabilités :

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \\ r_D \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P}$, le vecteur des primes de risque :

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} r_A - r_f \\ r_B - r_f \\ r_C - r_f \\ r_D - r_f \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{M}$, la matrice des variances-covariances :

$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} & \sigma_{AD} \\ \sigma_{BA} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} & \sigma_{BD} \\ \sigma_{CA} & \sigma_{CB} & \sigma_C^2 & \sigma_{CD} \\ \sigma_{DA} & \sigma_{DB} & \sigma_{DC} & \sigma_D^2 \end{vmatrix}$$

Ce sont les **données** du problème.

On cherche à déterminer $\boldsymbol{X}$, le vecteur des proportions « optimales » du portefeuille investies dans chacune des 4 actions :

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

et on aura besoin de calculer le vecteur $\boldsymbol{Z}$, un vecteur intermédiaire à partir duquel X sera calculé :

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \\ z_C \\ z_D \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\boldsymbol{X}$ correspond à la composition du **portefeuille tangent *T***.

Les étapes à suivre pour trouver le **portefeuille tangent** $\boldsymbol{T}$ sont :

1. Inverser la matrice $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{M}^{-1}$
2. Calculer $\boldsymbol{Z}$ tel que : $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P}$
3. Calculer la somme S des composantes de Z : $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{I}$ où $\boldsymbol{I}$ est le vecteur unitaire (toutes ses composantes sont égales à 1)
4. Dès lors : $\boldsymbol{X} = \frac{1}{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Z}$

On peut alors calculer la rentabilité et la variance du portefeuille tangent $\boldsymbol{T}$.

La rentabilité s'obtient comme suit : $r_T = \boldsymbol{R}'\boldsymbol{X}$

Pour calculer la variance du portefeuille on effectue le produit matriciel suivant :

$$\boldsymbol{\sigma_T^2} = \boldsymbol{X'MX}$$