Marchés financiers et évaluation des actifs

Corrigé : série d'exercices / 3

Exercice 1

1°- a/ $\forall$ r, on a :

$$P_0 = 7{,}9 / (1 + r) + 7{,}9 / (1 + r)^2 + ... + (7{,}9 + 100) / (1 + r)^6$$

$$D = [(1*7{,}9 / (1 + r)) + (2*7{,}9 / (1 + r)^2) + ... + (6*107{,}9 / (1 + r)^6)] / P_0$$

$$W_t = P_0.(1 + r)^t \qquad \forall\ t = 1, \ldots, 6$$

Taux	Prix (P_0)	Duration (D)
7%	104,28	5,02
7,9%	100	5
9%	95,05	4,97

Taux	7%	7,9%	9%
$w_{f0} = V_0$	104,28	100,00	95,05
$w_{f1} = V_1$	111,590	107,900	103,621
$w_{f2} = V_2$	119,401	116,424	112,947
$w_{f3} = V_3$	127,760	125,622	123,113
$w_{f4} = V_4$	136,703	135,546	134,193
$w_{f5} = V_5$	146,272	146,254	146,270
$w_{f6} = V_6$	156,511	157,808	159,434

b/ Représentation graphique : voir Excel. Cette représentation nous permet de voir que les 3 courbes se croisent en un point dont l'abscisse est proche de la duration. C'est une propriété caractéristique de la duration; la valeur acquise de l'obligation ne dépend pas du taux actuariel lorsque l'horizon est égal à la duration. En effet, à la date 0, les 3 prix sont rangés en ordre inverse des taux; à mesure que le temps passe, le décalage entre les valeurs acquises diminue puisque les coupons sont réinvestis à un meilleur taux dans le dernier scénario, c'est à dire celui où le prix initial est le plus faible. Les différences sont comblées à la date t + D.

2°- Cette propriété est très utile pour la gestion de portefeuilles obligataires, puisqu'un investisseur devra choisir un portefeuille dont la duration est égale à son horizon de placement, pour compenser les deux risques. Toutefois, ce résultat repose sur l'hypothèse que la courbe des taux est plate et que les déformations envisagées sont des déplacements parallèles, ce qui exclut la forme de courbe la plus couramment, observée (forme ascendante).

Exercice 2

1°- S $= x_A.S_A + x_B.S_B + x_C.S_C$
$= -[(20.000 / 75.000)*4{,}1 + (40.000 / 75.000)*5{,}9 + (15.000 / 75.000)*6{,}7] = -5{,}58$

2°- D $= x_A.D_A + x_B.D_B + x_C.D_C$
$= (20.000 / 75.000)*4{,}3 + (40.000 / 75.000)*6{,}2 + (15.000 / 75.000)*7{,}1 = 5{,}87$

3°- a/ On a :

$S = (dP_0 / P_0) / dr$

$\Rightarrow$ $dP_0 / P_0 = S.dr$

Ainsi, si les taux augmentent, la valeur du portefeuille d'obligations diminuera de :

$dP_0 / P_0 = -5{,}58*0{,}3\% = -1{,}674\%$

b/ Dans un contexte de hausse des taux, il vaut mieux avoir un portefeuille de faible sensibilité en absolu (ou à duration courte). En effet, plus la sensibilité est grande (ou la duration longue), plus la valeur du portefeuille diminue suite à une hausse des taux.

Exercice 3

A- La structure par terme des taux est plate.

1°- a/ Prix de l'obligation à l'émission :

$P_0 = 7{,}4 / (1{,}09) + 7{,}4 / (1{,}09)^2 + ... + (7{,}4 + 105) / (1{,}09)^5 = 97{,}026$

b/ Le rendement de l'obligataire est r / :

$P_0.(1 + r)^5 = w_f = V_5(c) + P_5$

$\rightarrow$ $V_5(c) = 7{,}4.(1{,}09)^4 + 7{,}4.(1{,}09)^3 + 7{,}4.(1{,}09)^2 + 7{,}4.(1{,}09) + 7{,}4 = 44{,}287$

$\rightarrow$ $P_5 = 105$

D'où, r / :

$97{,}026.(1 + r)^5 = 44{,}287 + 105 = 149{,}287$

$\Rightarrow$ $r = \sqrt[5]{149{,}287 / 97{,}026} - 1 = 9\%$

Conclusion : Si les taux du marché ne varient pas, le taux de rendement actuariel déterminé à l'émission constitue le rendement effectivement réalisé au bout de la période par l'obligataire.

2°- Le rendement de l'obligataire est r / :

$P_1.(1 + r)^2 = w_f = V_3(c) + P_3$

$\rightarrow$ $P_1 = 7{,}4 / (1{,}09) + 7{,}4 / (1{,}09)^2 + ... + (7{,}4 + 105) / (1{,}09)^4 = 98{,}359$

$\rightarrow$ $V_3(c) = 7{,}4.(1{,}09) + 7{,}4 = 15{,}466$

$\rightarrow$ $P_3 = 7{,}4 / (1{,}09) + (7{,}4 + 105) / (1{,}09)^2 = 101{,}394$

D'où, r / :

$98{,}359.(1 + r)^2 = 15{,}466 + 101{,}394 = 116{,}860$

$\Rightarrow$ $r = \sqrt{116{,}860 / 98{,}359} - 1 = 8{,}99\% \approx 9\%$

Conclusion : L'obligataire ayant gardé son titre sur une période 2 ans, durant laquelle il n'y a eu aucun changement de taux sur le marché, il réalise comme rendement, le taux du marché.

3°- a/ Pour calculer la duration après la 1ère échéance, il faut commencer par estimer le prix de l'obligation à cette date :

$P_1 = 7{,}4 / (1{,}09) + 7{,}4 / (1{,}09)^2 + ... + (7{,}4 + 105) / (1{,}09)^4 = 98{,}359$

$\Rightarrow$ $D_1 = [(1*7{,}4 / (1{,}09)) + (2*7{,}4 / (1{,}09)^2) + ... + (4*112{,}4 / (1{,}09)^4)] / 98{,}359$
$= 3{,}608$ = 3 ans, 7 mois et 9 jours.

b/ La sensibilité s'obtient à partir de la duration de la manière suivante :

$S = - 3{,}608 / 1{,}09 = -3{,}310$

c/ si $\Delta r = +1\%$ (passage de 9 à 10%) :

$\Rightarrow$ D'après S :

$P_1' = 98{,}359*(1 - 3{,}310\%) = 95{,}103$

$\Rightarrow$ D'après la valeur actualisée :

$P_1' = 7{,}4 / (1{,}1) + 7{,}4 / (1{,}1)^2 + ... + (7{,}4 + 105) / (1{,}1)^4 = 95{,}173$

La différence qui existe entre ces deux valeurs est due au fait que la courbe du prix de l'obligation est convexe et que donc la notion de sensibilité basée sur une dérivée de premier ordre, ne peut constituer une bonne estimation de la variation du prix que pour une variation infinitésimale de r.

Ce résultat est amélioré dès qu'on inclut dans l'estimation du prix de l'obligation, la dérivée de second ordre en ayant recours au concept de convexité :

$Cx = [1/98{,}359*1{,}09^2].[(1*2*7{,}4/1{,}09)+(2*3*7{,}4/1{,}09^2)+(3*4*7{,}4/1{,}09^3)+(4*5*112{,}4/1{,}09^4)]$
$= 14{,}650$

$\Rightarrow$ $dP(r) / P(r) = S.dr + ½.Cx.(dr)^2 = -3{,}310*1\% + 1/2*14{,}650* 1\%^2 = -3{,}238\%$
$\Rightarrow$ $P_1' = 98.359*(1 - 3{,}238\%) = 95{,}173$

une valeur égale à celle obtenue par actualisation.

B- La structure par terme des taux est croissante.

4°- P_2 se détermine de la manière suivante :

$P_2 = 7{,}4 / 1{,}1 + 7{,}4 / (1{,}102)^2 + (7{,}4 + 105) / (1{,}105)^3 = 96{,}127$

5°- Les taux implicites annuels sont les suivants :

- <u>Année 3/4</u> : r / : $(1 + 10\%).(1 + r) = (1 + 10{,}2\%)^2$

$\Rightarrow$ $r = ((1{,}102)^2 / 1{,}1) - 1 = 10{,}40\%$

- <u>Année 4/5</u> : r / : $(1 + 10{,}2\%)^2.(1 + r) = (1 + 10{,}5\%)^3$

  $\Rightarrow$ $r = [(1{,}105)^3 / (1{,}102)^2] - 1 = 11{,}10\%$

On vérifie que P_2 peut être réobtenu à partir des taux implicites de la manière suivante :

$$P_2 = [7{,}4 / 1{,}1] + [7{,}4 / (1{,}1*1{,}104)] + [(7{,}4 + 105) / (1{,}1*1{,}104*1{,}111)] = 96{,}129$$