Le choix des portefeuilles dans un cadre statique : le modèle de Markowitz

Les analyses conduites précédemment concernant la valeur et le risque d'un actif ont ceci de commun qu'elles considèrent un actif donné comme *isolé*. Or l'un des résultats essentiels de la finance moderne en matière de choix d'investissement est qu'il est possible, par la combinaison judicieuse de plusieurs actifs dans un *portefeuille*, de réduire le risque total subi pour une rentabilité espérée donnée : c'est l'effet de diversification. Aussi l'intérêt d'investir en un titre financier ne doit-il pas être évalué séparément mais dans le contexte de l'ensemble du portefeuille de l'investisseur et d'un marché où se font concurrence de nombreux véhicules d'épargne.

Le présent chapitre analyse comment un investisseur alloue de façon optimale son épargne[1] entre les différents actifs risqués disponibles sur le marché[2].

Nous considérons donc un marché financier sur lequel des titres (actions, obligations, …) peuvent être achetés ou vendus (ou émis), c'est-à-dire des positions longues ou courtes peuvent être constituées. Les portefeuilles sont formés par des combinaisons de ces titres. Les rentabilités des différents titres, et par conséquent les rentabilités des portefeuilles, sont en général aléatoires.

En avenir certain, il est facile de choisir entre des investissements alternatifs, la préférence étant accordée à celui qui a la plus grande VNP. En univers aléatoire, le problème est beaucoup plus complexe car ces investissements diffèrent entre eux non seulement par l'espérance mathématique des flux qu'ils génèrent mais également par leur risque (défini précisément plus loin) et des critères généraux permettant d'étayer des choix rationnels dans l'incertain doivent être établis préalablement.

---

[1] Selon la théorie économique, l'individu prend deux décisions interdépendantes: compte tenu de ses goûts et préférences et de sa richesse initiale, il répartit son revenu entre consommation et épargne. Compte tenu de cette dernière, sa richesse est allouée entre les différents actifs disponibles. La théorie du portefeuille présentée dans cet ouvrage ne concerne pas la première décision, qui est supposée prise.

[2] La théorie du portefeuille a été initialement développée par référence aux actions. Toutefois, les analyses qui suivent sont valables pour tout titre financier.

La première section porte sur la théorie des choix dans l'incertain ; elle comporte un bref exposé du critère de l'espérance de l'utilité (Von Neumann et Morgenstern) et du paradigme Espérance-Variance. Une deuxième section est consacrée à une présentation intuitive des principaux concepts (frontière d'efficience, diversification, …) s'appuyant sur des graphiques et des arguments statistiques très simples. La troisième section présente rigoureusement l'analyse mathématique des stratégies statiques de choix du portefeuille par un investisseur qui respecte le critère Espérance-Variance (modèle de Markowitz) dans l'hypothèse où les positions courtes sont autorisées. La quatrième section présente quelques extensions du modèle standard : positions courtes interdites, comportements décrits par des utilités HARA (dont la conformité au critère Espérance-Variance n'est qu'un cas particulier), comportements décrits par la « Finance Comportementale » non conformes à la rationalité de Von Neumann et Morgenstern. La cinquième et dernière section traite des stratégies dynamiques, c'est-à-dire impliquant des réallocations d'actifs entre le début et la fin de la gestion.

Section I

Choix rationnels dans l'incertain : les critères de l'espérance de l'utilité et de l'espérance-variance (EV)

Cette section présente les principaux aspects de la théorie des choix dans l'incertain. Le problème est celui de la détermination de la décision optimale parmi des alternatives conduisant à différents gains (ou pertes) aléatoires $\tilde{W}$. Les concepts fondamentaux présentés dans cette section s'expliquent simplement en se restreignant au cas où les variables aléatoires $\tilde{W}$ prennent un nombre fini de valeurs $(w_1,\ldots,w_N)$ avec des probabilités respectivement égales à $(p_1, ..., p_N)$. La variable aléatoire $\tilde{W}$ peut alors être interprétée comme la valeur algébrique du gain généré par une loterie et il s'agit d'établir un critère qui permette de comparer différentes loteries afin de choisir la « meilleure ».

Les quatre premiers paragraphes présentent succinctement le critère de l'espérance de l'utilité et analysent l'aversion au risque. Le cinquième paragraphe est consacré au paradigme de l'espérance-variance sur lequel est fondé la théorie classique du portefeuille.

1. Le critère de l'Espérance de l'Utilité

Avant les travaux de Bernouilli et Cramer (au début du 18ème siècle) "l'attrait" d'une loterie était censé être fondé sur l'espérance mathématique de son gain :

$$E(\widetilde{W}) = \sum_{i=1}^{N} p_i \, w_i$$

Selon une telle conception, un individu rationnel devrait être indifférent entre la loterie au résultat incertain $\widetilde{W}$ et une somme certaine égale à E($\widetilde{W}$) et, entre plusieurs loteries, devrait préférer celle qui donne l'espérance de gain la plus élevée.

Différents contre-exemples, concernant le comportement des individus face au risque, battent en brèche cette conception simpliste.

Contre-exemple 1

Considérons une loterie $\widetilde{X}$ donnant :

$$\widetilde{X} = \begin{cases} 0 \text{ €} \quad \text{avec une probabilité} = 1/2 \\ 20\,000 \text{ €} \quad \text{avec une probabilité} = 1/2 \end{cases}$$

La plupart des individus préfèrent un somme certaine de 10 000 € à la somme incertaine $\widetilde{X}$ alors même que E$(\widetilde{X})$ = 10 000 €.

Cette préférence pour le résultat certain reflète l'aversion au risque qui caractérise la plupart des agents économiques. Cette aversion au risque est liée au fait que l'utilité marginale de l'euro supplémentaire décroît. En effet, l'individu rationnel classe ses projets de dépense par ordre de priorité décroissante : les 10 000 premiers € sont affectés à des projets plus "utiles" que les 10 000 € suivants et, de ce fait, l'utilité de 20 000 € est inférieure au double de l'utilité attribuable à 10 000 €.

En fait, pour la plupart des agents économiques, l'"équivalent certain" de la loterie $\widetilde{X}$ de l'exemple précédent est inférieur à 10 000 €.

Contre-exemple 2 (paradoxe de Saint-Petersbourg)

Considérons le jeu suivant imaginé par D. Bernouilli en 1738 à Saint-Petersbourg : un dé est tiré jusqu'à ce qu'il tombe sur "face"; le jeu s'arrête dès que face est obtenue la première fois. On appelle n le nombre de tirages. La probabilité que n tirages exactement soient nécessaires pour obtenir le premier face est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Par ailleurs la loterie donne $\widetilde{W}$ = 2^n euros (soit 2 euros si face apparaît au premier tirage, 4 euros si deux tirages sont nécessaires, 8 euros si le premier face est obtenu au troisième tirage,…).

Dès lors : $E(\widetilde{W}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, 2^n = \infty$

Bien que l'espérance du gain soit infinie, tout individu rationnel, aussi riche soit-il, n'acceptera de payer qu'une somme limitée, éventuellement très faible, pour acquérir une telle loterie.

Comme dans le cas du contre-exemple 1, ce comportement s'explique par le fait que l'utilité de l'euro supplémentaire décroît avec la richesse et que, de ce fait, l'utilité de $2x$ € est inférieure à $2\times$ utilité de x €. C'est pourquoi Cramer et D. Bernouilli proposèrent d'appliquer au gain 2^n (obtenu en cas de n tirages) une "fonction d'utilité" U croissante mais concave (donc à utilité marginale décroissante) et de mesurer l'attrait d'une telle loterie par l'espérance de l'utilité du gain : $E\left[\mathrm{U}\left(\widetilde{\mathrm{W}}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}U\left(2^n\right)$

Cette somme est éventuellement définie ($< \infty$) pour U concave[3].

Ces différentes idées ont été systématisées par Von Neumann et Morgenstern dans un ouvrage fondamental[4] qui, à partir d'une axiomatique des choix dans l'incertain, fonde théoriquement l'espérance de l'utilité comme critère de choix rationnel (cf. l'annexe A pour un exposé de cette théorie).

En effet, à partir de quelques principes qui devraient régir tout comportement rationnel, il est possible de montrer que tout individu qui obéit à ces principes cherche à maximiser l'espérance d'une fonction d'utilité de la richesse. Cette fonction d'utilité U(**.**) est spécifique à chaque individu et traduit notamment son aversion à l'égard du risque. Schématiquement, un individu rationnel dont les préférences sont représentées par la fonction U et qui doit prendre une décision d dans un ensemble $\boldsymbol{D}$ de décisions, d conduisant à un gain aléatoire $\widetilde{\mathrm{W}}$ (d), "résout le programme" :

$$\underset{d\in D}{Max}\ \mathrm{E}\ [\mathrm{U}\ (\widetilde{W}\,(d))\ ]$$

Le lecteur intéressé par cette question fondamentale, mais à caractère essentiellement théorique, se reportera à l'annexe A de ce chapitre.

2. Quelques caractéristiques des fonctions d'utilité.

---

[3] Par exemple, pour la fonction d'utilité logarithmique, l'on a : $E\left(u\left(\widetilde{W}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\log 2^n=\log 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=4$; l'agent « logarithmique » n'acceptera donc de payer que quatre euros pour participer à cette loterie dont le gain espéré est pourtant infini.

[4] "The Theory of Games and Economic Behavior" 1944

On remarquera d'abord que deux fonctions d'utilité U et V liées par une relation linéaire affine, telle que : V(W) = a U(W) + b où a est une constante positive et b une constante quelconque, conduisent aux mêmes décisions. En effet d maximise E [U($\tilde{W}(d)$)] si et seulement si il maximise E[V($\tilde{W}$(d))] = a E [U($\tilde{W}(d)$)] + b. Le comportement d'un individu caractérisé par l'utilité U ne peut donc être distingué de celui dont les préférences sont reflétées par V et, dans ce sens, les fonctions d'utilité ne sont définies qu'à une transformation linéaire affine près.

On remarquera aussi, qu'en règle générale, E(U($\tilde{W}$)) ≠ U(E($\tilde{W}$)). On montrera d'ailleurs que la fonction d'utilité d'un individu allergique au risque est concave et que, dans ce cas, E[U($\tilde{W}$)] < U(E($\tilde{W}$)). Un individu allergique au risque rejettera donc la loterie donnant la somme incertaine $\tilde{W}$ au profit d'une somme certaine égale à E($\tilde{W}$).

3. L'aversion au risque et la concavité de la fonction utilité

a) *La forme de la fonction d'utilité*

Pour refléter le comportement d'un agent économique "standard", une fonction d'utilité U(**.**) doit posséder, au moins, les deux caractéristiques suivantes :

- Elle doit être croissante avec la richesse : en supposant que la fonction U est dérivable, l'utilité marginale U'(W) est donc positive.
- L'utilité marginale de la richesse, U'(W) doit être décroissante, ce qui implique que U est concave, comme sur la figure 1.

On a déjà observé que cette dernière caractéristique de la fonction d'utilité était indissolublement liée à l'aversion à l'égard du risque. Nous allons maintenant examiner de façon plus précise cette relation.

Considérons une loterie qui génère le gain $\tilde{W}$ suivant :

$$\tilde{W} = \begin{cases} 0 \quad avec \;\; proba \;\; 1/2 \\ b \quad avec \;\; proba \;\; 1/2 \;\; (b > 0) \end{cases}$$

Dès lors : $\mathrm{E}\left(\tilde{W}\right) = \dfrac{b}{2}$

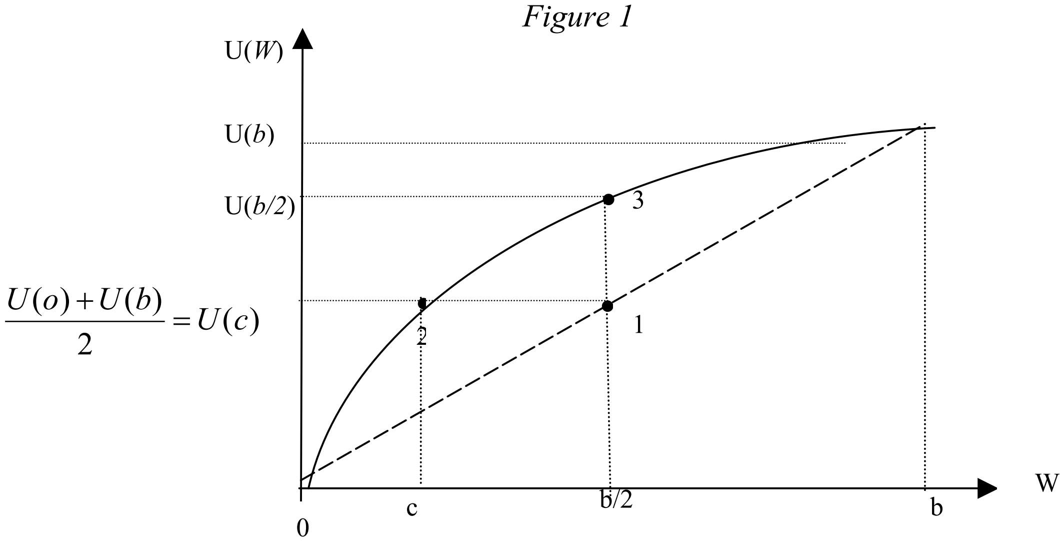
Considérons l'agent u dont la fonction d'utilité U est concave, comme celle représentée sur la figure 1 ci-dessous.

Remarquons d'abord que : E[$U(\tilde{W})$] = $\dfrac{U(o)+U(b)}{2}$

On remarquera aussi qu'il existe une richesse certaine c telle que

$U(c) = \text{E}\,[U(\tilde{W})] = \dfrac{U(o)+U(b)}{2}$ (cf. point 2 sur la figure 1).

Figure 1



c s'interprète comme « l'équivalent certain » de $\tilde{W}$ car l'agent u est indifférent entre la richesse certaine c et la richesse incertaine $\tilde{W}$ qui donne la même espérance d'utilité.

On remarquera enfin (cf. figure) que, du fait de la concavité de U :

$$c < E(\tilde{W}) = \frac{b}{2} \text{ ; donc :}$$

$$E\,[U\,(\tilde{W})] = U(c) < U(\frac{b}{2}) = U\,[E\,(\tilde{W})]$$

(comparer les points 2 et 3 sur la figure).

Dès lors, une loterie incertaine $\tilde{W}$ a moins d'attrait pour l'individu u qu'une somme certaine égale à E($\tilde{W}$).

Ce résultat qui révèle l'aversion à l'égard du risque de u (interprétation financière) résulte de la concavité de U : la concavité de la fonction d'utilité traduit donc, sur le plan mathématique, l'aversion à l'égard du risque.

b) *Mesure (locale) du degré d'aversion à l'égard du risque*

Considérons encore un individu u, dont les préférences sont représentés par une fonction d'utilité U de la richesse que nous supposerons (au moins) deux fois dérivable avec :

$U'(\tilde{W}) > 0$ (l'utilité croît avec la richesse)

$U''(\widetilde{W}) < 0$ (l'utilité marginale est décroissante, donc U est concave et u est allergique au risque).

Nous supposerons en outre que u dispose d'une richesse $\widetilde{W}$ entachée d'un faible aléa $\widetilde{\varepsilon}$ de sorte que :

$\widetilde{W} = W_0 + \widetilde{\varepsilon}$

avec : $W_0 = E(\widetilde{W})$ donc $E(\widetilde{\varepsilon}) = 0$; et σ_ε^2 petit.

L'aversion au risque de u implique que l'aléa $\widetilde{\varepsilon}$ qui s'ajoute à sa richesse sans en affecter l'espérance réduit son espérance d'utilité : u est donc prêt à payer une certaine somme (prime de risque) pour s'affranchir de cet aléa indésirable.

Le montant maximum π de la prime de risque que u est prêt à payer pour éliminer $\widetilde{\varepsilon}$ résulte de l'équation :

$$U(W_0 - \pi) = E\,[U(W_0 + \widetilde{\varepsilon})]$$

Le terme de gauche représente l'utilité de la richesse (certaine) disponible après paiement de la prime et celui de droite l'espérance de l'utilité de la richesse (aléatoire) dans l'hypothèse où u ne paye pas la prime et supporte donc l'aléa $\widetilde{\varepsilon}$.

Un développement en série des deux membres de cette dernière équation, autour de W_0, donne :

$$U(W_0) - \pi\, U'(W_0) + o(\pi) = E\,[U(W_0) + \widetilde{\varepsilon}\ U'(W_0) + \frac{1}{2}\,\widetilde{\varepsilon}^{\,2}\, U''(W_0) + o(\widetilde{\varepsilon}^{\,2})]$$

$$= U(W_0) + \frac{1}{2}\,\sigma^2_\varepsilon\, U''(W_0) + o(\sigma^2_\varepsilon)$$

Donc : $\lim\limits_{\sigma_\varepsilon^2 \to 0} \dfrac{\pi}{\sigma_\varepsilon^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$

Soit, quand σ_ε^2 et π sont petits, approximativement :

$$\pi \approx -\frac{1}{2}\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)}\ \sigma_\varepsilon^2$$

La prime de risque que l'agent u accepterait de payer pour s'affranchir du risque $\widetilde{\varepsilon}$ est donc proportionnelle à σ_ε^2 et à $-\dfrac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$.

σ_ε^2 représente « l'intensité » du risque ε alors que $-\dfrac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$ est spécifique à l'agent u et caractérise son degré d'aversion à l'égard du risque.

$A(W_0) \equiv -\dfrac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$ s'appelle le coefficient d'aversion absolue par rapport au risque. Comme $U''(W_0) < 0$ pour une utilité U concave et que par ailleurs $U' > 0$, le coefficient d'aversion $A(W_0)$ est positif.

Il est utile également de définir:

- l'aversion relative par rapport au risque: $R(W_0) \equiv W_0\, A(W_0)$

- les coefficients de tolérance (respectivement absolue et relative) à l'égard du risque : $\dfrac{1}{A(W_0)}$ et $\dfrac{1}{R(W_0)}$.

4. Quelques fonctions d'utilité standard

Les quelques fonctions d'utilité suivantes sont fréquemment considérées dans la littérature financière :

a) *Utilité à aversion absolue au risque constante* : $U(W) = - e^{-AW}$

où A est une constante positive et $-\dfrac{U''(W)}{U'(W)} = A$

b) *Utilité à aversion relative constante* : $U(W) = \dfrac{1}{1-R} W^{1-R}$

où R est constant (positif et $\neq 1$) et $-\dfrac{U''(W)}{U'(W)} = \dfrac{R}{W}$, d'où R est le coefficient d'aversion relative au risque.

c) *Utilité logarithmique* : $U(W) = Log\ W$, d'où $-W\dfrac{U''(W)}{U'(W)} = 1$

Le coefficient d'aversion relative par rapport au risque d'un agent logarithmique est donc égal à 1. Il s'agit d'un cas particulier de b) pour R = 1.

d) *Utilité quadratique* : $U(W) = W - aW^2$ où a est une constante positive, représentée sur la figure 2 ci dessous.

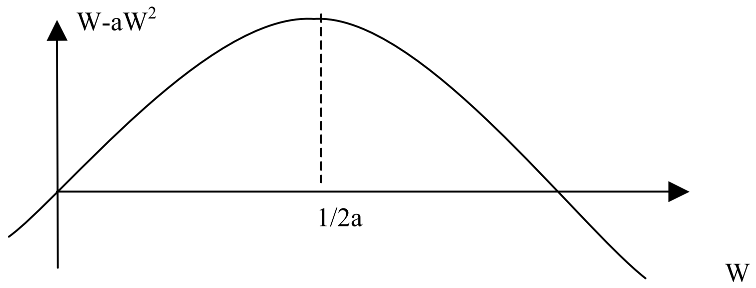


Figure 2

L'utilité quadratique, très souvent présumée (explicitement ou implicitement), est toutefois entachée de trois graves défauts :

- Elle n'est croissante que pour $W < \frac{1}{2a}$ et n'est donc « utilisable » qu'à la condition que les différentes richesses considérées et comparées, aient une probabilité négligeable de dépasser le « seuil de saturation » $\frac{1}{2a}$.

- Le coefficient d'aversion absolue au risque, $\frac{2a}{1-2aW}$ croît avec la richesse, or l'évidence empirique étaie la thèse d'une décroissance de ce coefficient avec la richesse.

- Elle implique une indifférence de l'agent par rapport à une éventuelle asymétrie de la distribution de probabilité de la richesse. Ce point sera développé dans le paragraphe suivant.

e) *L'Utilité de type HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion)*: $U(X) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{X-\theta}{\gamma}\right)^{1-\gamma}$,

avec quelques restrictions[5] sur les coefficients γ et θ et sur le domaine de définition.

La tolérance au risque est linéaire par rapport à la richesse et s'écrit : $-\frac{U'(X)}{U''(X)} = \frac{X-\theta}{\gamma}$

[5] Voir Allaz et Dumas (1996) par exemple pour plus de détails sur ces restrictions.

Pour $\theta = 0$ l'utilité HARA devient à aversion relative constante égale à γ et pour $\theta = 0$ et $\gamma = +1$, asymptotiquement, elle est logarithmique ; pour $\gamma = -1$ la HARA est quadratique ; quand θ tend vers moins l'infini elle tend vers une utilité à aversion absolue constante.

La famille des fonctions d'utilité HARA englobe donc toutes les classes d'utilité précédemment décrites en a), b), c) et d).

4. Le critère Espérance – Variance

a) Présentation du critère

L'expérience courante indique que la plupart des investisseurs éprouvent de l'aversion pour le risque c'est-à-dire, qu'entre différentes distributions de richesse de même espérance mathématique, ils préfèrent celle dont le risque est le plus faible. L'investisseur qui suit le critère espérance-variance (E-V ci-après) mesure le risque affectant sa richesse $\widetilde{W}$ à l'aide de la variance de celle-ci $[\sigma^2(\widetilde{W})]$; il prendra ses décisions en fonction de l'espérance, $E(\widetilde{W})$, qu'il souhaite la plus grande possible, et de la variance, $\sigma^2(\widetilde{W})$, qu'il souhaite la plus faible possible. Considérons le cas où une décision d doit être prise dans un ensemble ***D*** de décisions possibles. La richesse dont disposera l'agent, $\widetilde{W}(d)$, est fonction de la décision d qu'il choisit. Dans une telle situation, le décideur qui suit le critère E-V résout le programme (P) suivant :

$$\text{(P)} \qquad \underset{d \in D}{Max} \quad f\left(E(W(d)), \sigma^2(W(d)\right)$$

où f est une fonction croissante de E et décroissante de σ^2 : à variance $\sigma^2(W)$ donnée, l'agent prendra la décision qui conduit à la richesse d'espérance maximum ; à espérance $E(W)$ donnée, il minimisera $\sigma^2(W)$. Dès lors, la solution d^* de (P) résout aussi les deux programmes P_E et P_σ suivants :

$$(P_E) \qquad \text{Min } \sigma^2(W(d)) \text{ , sous la contrainte : } E(W(d)) = K_E$$

$$(P_\sigma) \qquad \text{Max } E(W(d)) \text{, sous la contrainte : } \sigma^2(W(d)) = K_\sigma$$

où K_E et K_σ sont deux constantes égales respectivement à $E(W(d^*))$ et à $\sigma^2(W(d^*))$.

b) Le critère E-V et l'espérance de l'utilité

Le critère d'espérance de l'utilité est fondé sur le plan théorique alors que le critère espérance-variance est « ad hoc » et très critiquable à différents égards. Notamment, l'appréciation du risque à l'aide de la variance conduit à considérer équivalentes les déviations positives par rapport à la moyenne et les déviations négatives. Par exemple, les deux distributions de probabilité des deux richesses W_a et W_b de la figure ci-dessous, qui ont la même moyenne E et la même dispersion autour de E, sont équivalentes pour l'investisseur qui suit le critère E-V.

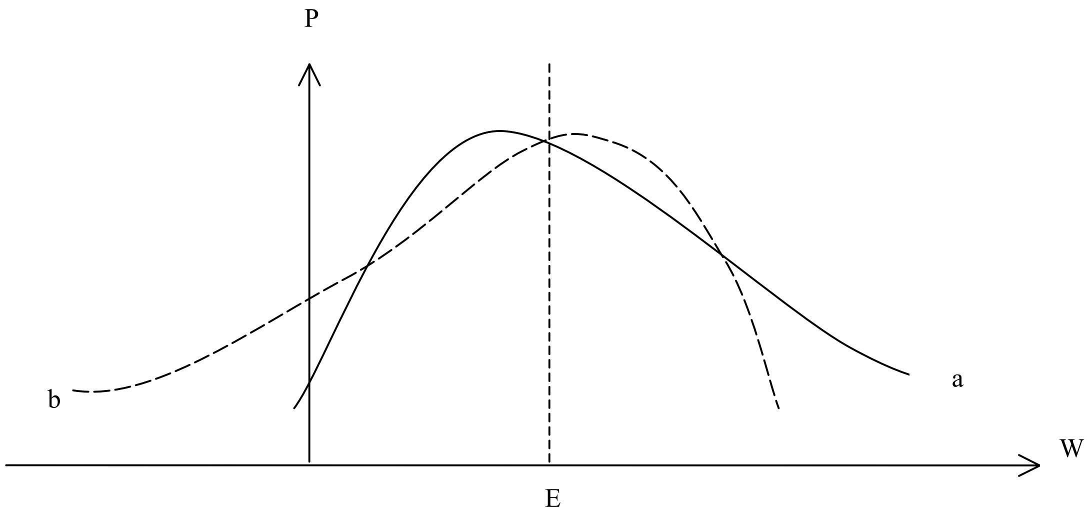


Figure 3

Par construction, ces deux distributions sont asymétriques mais symétriques l'une de l'autre par rapport à un axe vertical passant par E, leur moyenne commune. Elles ont donc la même moyenne E et la même variance mais l'asymétrie est positive pour W_a et négative pour W_b.

En fait, les agents ne sont pas en général indifférents au troisième moment de la distribution de leur richesse (appelé coefficient d'asymétrie ou skewness) qui exprime une dissymétrie de la distribution par rapport à sa moyenne. En général l'aversion au risque est associée à une préférence à l'égard des richesses (ou revenus) dont la distribution présente une asymétrie positive, telle que W_a, qui réduit le risque de très fortes pertes.

Néanmoins, le critère E-V est impliqué par la maximisation de l'espérance de l'utilité dans deux cas : celui d'une fonction d'utilité quadratique d'une part ; celui des richesses distribuées selon une loi Normale, d'autre part.

Dans le cas d'un individu dont les préférences peuvent être représentées à l'aide d'une fonction d'utilité quadratique ($W - aW^2$; $a > 0$), la maximisation de l'espérance de l'utilité $E(\widetilde{W}) - a\,E(\widetilde{W}^2)$ conduit, pour $E(\widetilde{W}) = K$ donné, à préférer la richesse minimisant $E(\widetilde{W}^2)$, donc celle qui minimise $\sigma^2(\widetilde{W}) = E(\widetilde{W}^2) - K^2$: l'agent à préférences quadratiques applique donc le critère E-V.

Dans le cas où la richesse est distribuée selon une loi Normale, toute la distribution de $\tilde{W}$ est caractérisée par les deux paramètres E($\tilde{W}$) et $\sigma^2(\tilde{W})$; on peut alors écrire, pour toute fonction d'utilité U :

$$E[U(\tilde{W})] = f(E(\tilde{W}), \sigma^2(\tilde{W})).$$

Tous les agents économiques qui comparent des richesses gaussiennes appliquent donc le critère E-V. En outre, tout investisseur fuyant le risque maximise une fonction qui dépend positivement de l'espérance et négativement de la variance.

Section II

Présentation intuitive et graphique des principaux concepts de la théorie du portefeuille

Les principaux concepts qui émergent de la théorie des choix optimaux par des individus qui appliquent le critère espérance-variance ainsi que ceux relatifs à la diversification et à ses limites peuvent être facilement appréhendés à partir de graphiques et d'outils mathématiques et statistiques très simples. Cette section développe ces analyses techniquement élémentaires, l'étude mathématique plus précise des portefeuilles efficients étant reléguée en section III. Le lecteur maîtrisant ces concepts fondamentaux peut aborder directement la section III.

1 Hypothèses, cadre général et définition des portefeuilles efficients

a) Cadre général et représentation des positions longues et courtes

Nous considérons, ci-après, un individu qui combine différents titres pour construire un portefeuille. L'investissement porte sur une période de durée arbitraire, débutant en $t = 0$ et s'achevant en $t = 1$ (on pourra penser à une période d'un an de durée). L'investisseur prend des positions en début de période (t = 0) puis ne réalise aucune transaction par la suite. Il s'intéresse à la valeur de ce portefeuille en fin de période (t = 1). Pour un investissement initial donné, cette valeur terminale est univoquement liée à sa rentabilité entre 0 et 1. Le taux de rentabilité (arithmétique), sur la période (0, 1), d'un titre ou d'un portefeuille dont le prix est P_0 en $t = 0$, P_1 en $t=1$ et qui distribue un dividende D_1 en $t = 1$ est égal à :

$R = \frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0}$. Dans la suite, par économie de notation, P_1 représente le plus souvent la valeur globale incluant le dividende : la rentabilité[6] s'écrit alors plus simplement : $R = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$.

Les positions peuvent être longues ou courtes. Dans le cas d'une position longue sur un actif de prix P_0 en 0, P_1 (aléatoire) en 1, l'investisseur achète le titre en 0 et dispose d'un patrimoine P_1 en 1 : il s'agit d'un investissement générant la séquence : $-P_0, P_1$ dont la rentabilité est R.

Dans le cas d'une prise de position courte, l'opérateur vend ou émet le titre en t=0, ce qui va se traduire par la séquence $+P_0, - P_1$ (en 0 l'opérateur reçoit P_0 euros et en t =1 l'opération induit une réduction de la valeur de son patrimoine de P_1 euros) : il s'agit donc d'un financement (au taux R), éventuellement destiné à financer les positions longues prises sur d'autres titres. Les prises de positions courtes sont réalisées dans différents contextes et selon différentes procédures telles que :

- Un emprunt du titre en 0 (que l'on doit rendre en t=1) immédiatement suivie (en 0) d'une vente au comptant de ce même titre (cf. le chapitre III section 4-1, sur les prêts et emprunts de titres) : il s'agit d'une vente à découvert ;
- Une vente à terme du titre (d'échéance t =1), accompagnée d'un emprunt (entre 0 et 1) d'un montant égal au prix au comptant P_0 ;
- Une émission du titre au prix P_0, P_1 étant alors égal à la valeur de marché de la dette en t=1 ;
- Une simple vente en t = 0 d'un titre préalablement présent dans le portefeuille de l'opérateur ; la séquence $+P_0, - P_1$ s'interprète alors comme une *différence* par rapport aux flux ou aux valeurs prévalant en l'absence de l'opération.

De façon générale, une position sur n titres a une valeur nP , avec $n > 0$ ou $n < 0$ selon que la position est longue ou courte : la *prise* de cette même position génère la séquence $-nP_0$, nP_1.

b) Portefeuilles efficients

Nous supposerons que l'investisseur évalue le risque de son portefeuille par la variance de sa rentabilité et applique le critère E-V.

---

[6] Par abus de langage, nous considérerons les termes « taux de rentabilité » et « rentabilité » comme synonymes.

Définition : Les portefeuilles, caractérisés par une espérance de rentabilité maximum à variance de rentabilité donnée (ou par une variance minimum à espérance de rentabilité donnée), sont appelés portefeuilles efficients (ou efficaces).

Les principaux concepts relatifs aux portefeuilles efficients ont été introduits, au début des années cinquante, par H. Markowitz.

Nous allons analyser les portefeuilles efficients en commençant par l'étude du cas particulier des portefeuilles constitués de deux titres uniquement avant d'aborder le cas général des portefeuilles comprenant un nombre quelconque de titres,

2 L'étude des portefeuilles à deux titres

Considérons deux actifs A et B dont les rentabilités aléatoires sont notées R_A et R_B.

On utilisera les notations suivantes : les variables aléatoires sont en majuscule et les éléments non aléatoires (scalaires) en minuscule ; $\mu_A \equiv E(R_A)$, $\mu_B \equiv E(R_B)$, $\sigma_A \equiv \sigma (R_A)$ et $\sigma_B \equiv \sigma (R_B)$ désignent les espérances et les écarts-types des rentabilités de ces deux actifs et $\sigma_{AB} \equiv cov(R_A,R_B)$ leur covariance ; rappelons que $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\, \sigma_A\sigma_B$ où ρ_{AB} désigne le coefficient de corrélation entre R_A et R_B.

Un portefeuille, combinaison de A et B, est caractérisé par les poids alloués à chaque actif : une fraction x de la somme investie est placée dans le titre A et la fraction complémentaire (1-x) dans B. En raisonnant sur un placement de 1 €, sont donc initialement investis x et (1-x) € dans les titres A et B, respectivement.

Si R_P désigne la rentabilité du portefeuille, sa valeur terminale (pour 1€ investi) sera égale à :

$$1 + R_P = x(1 + R_A) + (1- x)(1 + R_B) = 1 + xR_A + (1 - x)R_B$$

La rentabilité du portefeuille est donc égale à la moyenne pondérée des rentabilités des titres qui le composent : $R_P = x\, R_A + (1- x)R_B$

Insistons sur le fait que, *ex ante*, les rentabilités R sont incertaines alors que les poids x sont connus (choisis) dès l'instant 0.

L'espérance de la rentabilité du portefeuille, μ_P , et sa variance σ^2_P sont données par :

$$\text{(1)} \qquad \mu_P = x\mu_A + (1-x)\mu_B$$

$$\text{(2)} \qquad \sigma^2_P = x^2\sigma^2_A + (1 - x)^2\, \sigma^2_B + 2x(1-x)\sigma_{AB}$$

Ainsi, l'espérance et la variance du portefeuille sont exprimées en fonction de la valeur de x, ce qui permet aux investisseurs de choisir le poids x, de manière appropriée.

Exemple : Supposons que, dans le portefeuille P, le poids x de l'actif A soit égal à 2/3 et que le complément (1/3) soit investi dans B ; supposons en outre que :

- la rentabilité espérée de l'actif A soit de 12% et celle de titre B de 18%
- les écarts-type des deux rentabilités soient égaux à 40% et leur coefficient de corrélation égal à 0,5.

Calculons l'espérance, μ_P, et l'écart-type de la rentabilité, σ_P, de ce portefeuille.

Par application de la formule (1) : $\mu_P = (\frac{2}{3} \times 12) + (\frac{1}{3} \times 18) = 14\%$

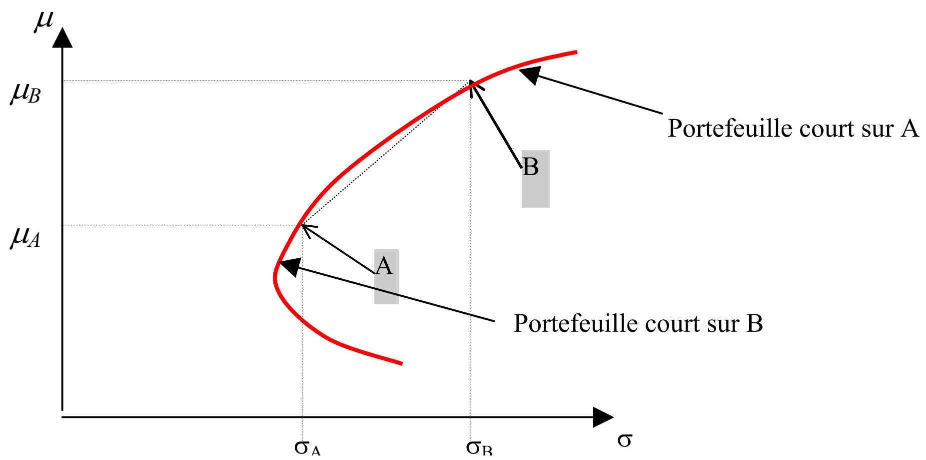
$\sigma_{AB} = \rho_{AB}\ \sigma_A \sigma_B = 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}08$. La formule (2) implique alors :

$$\sigma^2_P = (\frac{2}{3})^2 \times (0{,}4)^2 + (\frac{1}{3})^2 \times (0{,}4)^2 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 0{,}08 = 0{,}12444 \text{ ; soit : } \sigma_P = 0{,}353$$

On remarquera que l'écart-type de la rentabilité de ce portefeuille (0,353) est inférieur à la moyenne des écarts-type des rentabilités de ses composantes (0,4). Cette réduction du risque est due à la diversification, concept fondamental étudié plus loin.

Considérons les deux équations (1) et (2) : à chaque x correspond un point dans l'espace (σ, μ) et, en faisant varier x, on génère une courbe qui est le lieu des points représentatifs des portefeuilles obtenus par des combinaisons de A et B. En fait, (1) et (2) constituent l'équation paramétrique de cette courbe qui est l'hyperbole représentée sur la figure 4.

Figure 4 : combinaison de deux titres, cas général



Le portefeuille uniquement constitué de l'actif A ($x = 1$) y est représenté par le point A. En se déplaçant sur la courbe AB de A vers B, les portefeuilles contiennent de moins en moins de titres A et de plus en plus de titres B. Le point B correspond à un portefeuille comprenant le seul titre B (x = 0, donc 1 – x = 1). Les points de la courbe situés à droite de B représentent des portefeuilles pour lesquels x < 0 (vente à découvert de A). Les points situés à gauche de A représentent des portefeuilles pour lesquels 1 – x < 0 (position courte sur B). Si les positions courtes sont interdites ou impossibles à réaliser, seuls les points du segment curviligne AB correspondent à des portefeuilles atteignables.

La forme de l'hyperbole AB dépend du coefficient de corrélation ρ_{AB} entre les deux rentabilités.

Quatre cas particuliers méritent d'être examinés.

- Premier cas : les rentabilités des deux titres sont parfaitement corrélées (ρ_{AB} = 1). Ce cas est représenté sur la figure 5-a .

Fig 5-a : $\rho_{AB} = +1$

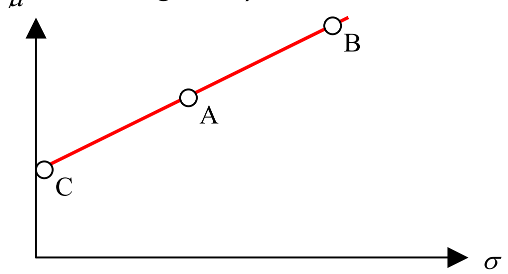
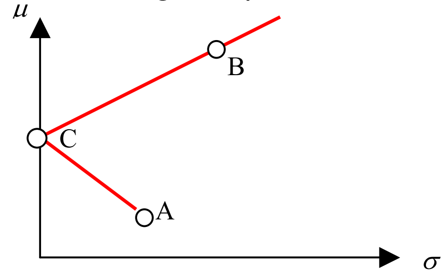


Fig 5-b : $\rho_{AB} = -1$



L'hyperbole AB est alors dégénérée en une droite[7] qui coupe l'axe vertical en C : dans ce cas extrême de corrélation parfaite, il est possible de construire un portefeuille sans risque (d'écart-type de rentabilité nul), en prenant une position courte sur B (donc un poids > 1 est affecté à A).

- Deuxième cas particulier (figure 5-b) : les rentabilités des deux titres sont parfaitement corrélées négativement ($\rho_{AB} = -1$)[8]. Il est alors possible de construire un portefeuille C long sur les deux titres exempt de tout le risque car, pour une valeur particulière (x=x_C), les deux aléas ($x_C R_A$ et $(1\text{-}x_C)R_B$) se neutralisent parfaitement. Il s'agit d'une diversification parfaite (obtenue avec deux titres seulement) qui tient au fait que ces deux aléas sont parfaitement négativement corrélés.

- Troisième cas particulier : $\rho_{AB} = 0$ (les rentabilités des deux actifs ne sont pas corrélées). Ce cas ne donne pas lieu à une représentation géométrique particulière (il

---

[7] L'équation (2) se réduit à : $\sigma^2_P = x^2\sigma^2_A + (1–x)^2\ \sigma^2_B + 2x(1–x)\ \sigma_A\sigma_B$, carré parfait qui permet d'obtenir : $\sigma_P= x\sigma_A + (1–x)\sigma_B= \sigma_B+ x(\sigma_A\text{-}\sigma_B)$; par ailleurs: $\mu_P= x_A\mu_A + (1–x)\ \mu_B$. En éliminant x des deux dernières équations, on obtient une relation linéaire entre μ_P et σ_P

[8] L'équation (2) se réduit à : $\sigma^2_P = x^2\sigma^2_A + (1–x)^2\ \sigma^2_B - 2\ x(1–x)\ \sigma_A\sigma_B = [x\ \sigma_A - (1–x)\sigma_B]^2$, soit : $\sigma_P=\left|\ x\sigma_A - (1–x)\sigma_B\right| = \left|\ -\sigma_B+ x(\sigma_A+\sigma_B)\ \right|$ qui s'annule pour $x = \sigma_B/(\sigma_A+\sigma_B)$ et qui, associée à : $\mu_P= x_A\mu_A+ (1–x)\ \mu_B$ conduit à l'équation des deux segments représentés sur la figure 5-b.

pourrait être représenté par la figure 4) et constitue un cas « intermédiaire » entre les deux cas extrêmes représentés en 5-a et 5-b. Comme dans le cas général, les portefeuilles atteignables sont représentés, dans l'espace (σ-μ), par l'hyperbole AB.

- Quatrième cas particulier (figure 6) : l'un des deux actifs, par exemple A, est sans risque ; l'écart-type de sa rentabilité est donc nul et il représenté par le point A de l'axe vertical. Il pourrait s'agir d'un bon du Trésor à taux fixe de maturité identique à l'horizon de l'investisseur. Dès lors, non seulement $\sigma_A = 0$ mais $\rho_{AB} = 0$. Le taux sans risque sera noté r ($R_A = r$).

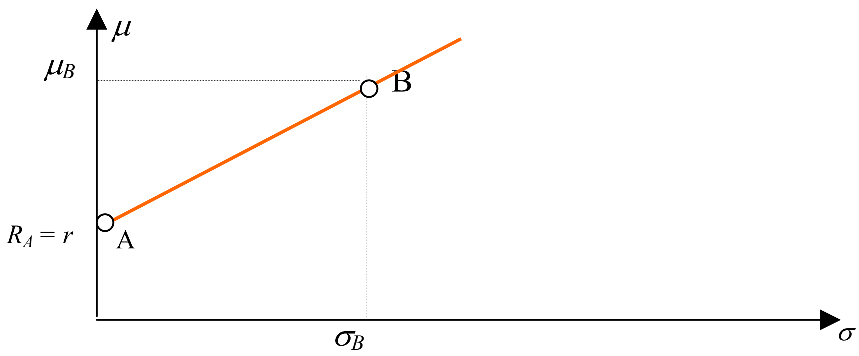


Figure 6 : combinaisons de A et B quand A est sans risque

Dans ce cas, les points représentatifs des portefeuilles atteignables sont alignés sur la droite AB.

3 Portefeuilles comprenant N titres.

Dans le cas général où les portefeuilles combinent un nombre de titres risqués quelconque (N>2), la frontière efficiente peut prendre deux formes, selon la présence ou l'absence d'un actif sans risque.

Dans la suite nous considérons donc deux cas. Le premier est caractérisé par l'absence de l'actif sans risque, et le deuxième par l'existence d'un tel actif. Nous supposerons que les positions courtes sont autorisées (les conséquences d'une impossibilité de ventes à découvert seront examinées dans l[e] chapitre suivant).

a) Premier cas : tous les actifs sont risqués

Il est possible de montrer (cf. section suivante) que l'ensemble des points représentatifs de *tous les portefeuilles possibles dans l'espace (σ, E) est constitué par la surface grisée S* représentée sur la figure 7 et délimitée par une hyperbole. Cependant, seuls certains portefeuilles intéressent l'investisseur soumis au critère E-V. Par exemple, l'ensemble des portefeuilles situés sur le segment AB qui présentent le même niveau de risque σ^A offrent des espérances de rentabilité différentes ; en particulier, le portefeuille A ayant la plus forte espérance de rentabilité, sera préféré par tous les investisseurs aux autres portefeuilles représentés sur le segment AB. En considérant toutes les valeurs possibles de l'écart-type σ^A il est clair que le lieu des points représentatifs des « portefeuilles dominants » est la branche supérieure de l'hyperbole délimitant la surface S et représentée en rouge sur la figure 7. Cette courbe, appelée **frontière efficiente ou frontière d'efficience (ou efficace),** est le lieu des points représentant les portefeuilles efficients,.

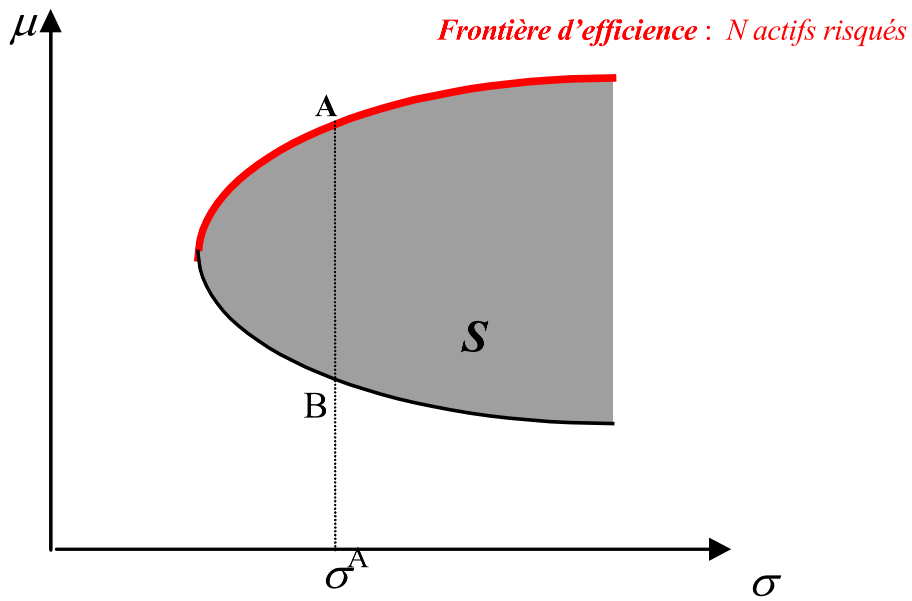


Figure 7.

b) Deuxième cas : existence d' un actif sans risque

Supposons maintenant qu'il soit possible de prêter (ou placer des fonds) et d'emprunter (ou d'émettre des titres), sur la période considérée, à un même taux d'intérêt r exempt d'incertitude. Par abus de langage, nous appellerons r cet actif sans risque. Il est représenté sur la figure 8 par le point d'abscisse nulle et d'ordonnée r.

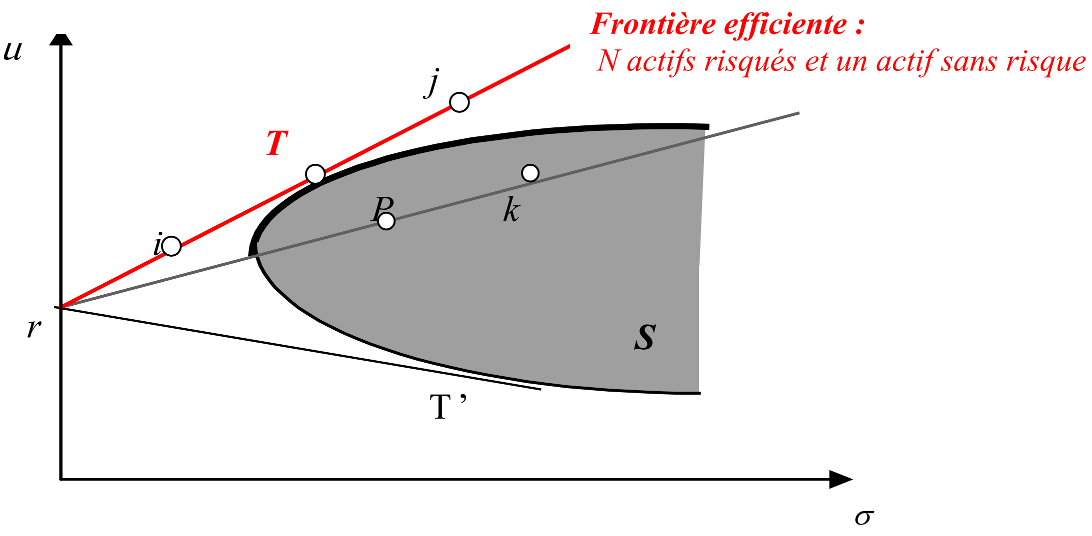


Figure 8 : Portefeuilles atteignables et frontière efficiente (r-T) en présence de N actifs risqués et d'un actif sans risque

Par ailleurs il existe *N* actifs risqués, comme ceux considérés en a) et l'ensemble de leurs combinaisons possibles génère, comme en a), la zone grisée ***S***.

Considérons un portefeuille k quelconque constitué uniquement d'actifs risqués (son point représentatif est donc dans ***S***) et un portefeuille *P* contenant une proportion *x* de k et une proportion $(1 - x)$ de l'actif sans risque de rentabilité certaine *r* . Il est aisé de montrer que [9] :

$$(4) \quad \mu_P = r + \frac{\mu_k - r}{\sigma_k}\sigma_P$$

Le point représentatif de P se trouve donc situé sur la demi-droite issue de r et passant par k (cf. figure 8) et, en faisant varier x entre 0 et + ∞, on génère toute cette demi-droite.

De façon générale, n'importe quel portefeuille P est obtenu par combinaison de l'actif sans risque et d'un portefeuille d'actifs risqués tel que k ; il est donc représenté par un point situé sur une des droites telles que rk issues de *r* et formant un faisceau (le cône T'rT représenté sur la figure 8). Ce cône *T'rT* constitue donc l'ensemble des points représentatifs de tous les portefeuilles réalisables. Les portefeuilles *efficients* sont représentés par la droite du faisceau *T'rT* dont la pente est la plus forte, c'est-à-dire la tangente rT. En effet, à chaque niveau de risque (pour chaque valeur de σ) correspond un point de cette droite qui représente un

---

[9] Les équations (1) et (2) appliquées à P impliquent : $\mu_P = x\mu_K + (1\text{–}x)r$; $\sigma_P = x\sigma_k$, d'où : $\mu_P = r + \frac{\mu_k - r}{\sigma_k}\sigma_P$ soit une relation linéaire entre μ_P et σ_P, représentée par la droite passant par r et k, de pente $[\mu_K - r]/\sigma_k$.

portefeuille dont l'espérance de rentabilité est maximum pour ce niveau de risque. *La frontière d'efficience est donc la demi-droite rT, tangente à S issue du point r.*
En vertu de (3), l'équation de la frontière efficiente s'écrit :

$$(3') \qquad \mu_T = r + [\mu_T - r]\frac{\sigma_P}{\sigma_T}$$

T représente le portefeuille « tangent » qui, comme tous les portefeuilles de ***S***, est constitué, exclusivement, d'actifs risqués.

Un résultat fondamental, dû à Tobin et à Markowitz et appelé « *théorème de séparation en deux fonds »* se déduit simplement de cette analyse graphique : *tous les portefeuilles efficients sont des combinaisons de l'actif sans risque et du portefeuille tangent T* : bien que le marché propose N+1 titres différents (N risqués et un sans risque) tous les portefeuilles efficients se construisent à partir des mêmes deux fonds (l'actif sans risque et *T*).
Il est important de comprendre que les investisseurs partageant le même horizon d'investissement et les mêmes croyances quant aux espérances, variances et covariances de rentabilité (ils ont la même frontière d'efficience) détiennent tous une combinaison du même portefeuille d'actifs risqués *T* et de l'actif sans risque mais que les poids respectifs qu'ils allouent à *T* et à l'actif sans risque dans cette combinaison dépendent de leur aversion au risque et de leur richesse. Un individu peu audacieux allouera un poids faible au portefeuille d'actifs risqués *T* et un poids élevé à l'actif sans risque (il choisira un portefeuille tel que *i* sur la figure 8) alors qu'un investisseur plus téméraire, pour obtenir une forte espérance de rentabilité, affectera un poids élevé à *T* et un poids faible à r. Il choisira même éventuellement de s'endetter (poids négatif sur l'actif sans risque) pour investir en T plus que sa richesse initiale et construira un portefeuille tel que *j* sur la figure 8.
En outre, puisque la pente de la droite *r-T* est positive ($\mu_T > r$), *le risque que l'investisseur doit accepter d'assumer est d'autant plus élevé que l'espérance de rentabilité qu'il requiert est forte*. Le fait qu'un accroissement d'espérance de rentabilité « se paye » d'un risque accru, qualifié de « risk-return trade-off » en anglais, constitue l'un des concepts les plus importants de la Finance.

Exemple :
Supposons que le taux du un an, *r*, soit égal à 4%, et que l'on estime, pour le portefeuille tangent, μ_T = 10%, σ_T = 21% ; quel risque (écart-type de rentabilité) doit-on assumer pour obtenir une espérance de rentabilité de 6% ? de 8% ?

Pour obtenir $\mu_P = 6\%$ il faut accepter un $\sigma_P = \sigma_T\,(\mu_P - r)/(\mu_T - r) = 7\%$ et pour obtenir $\mu_P = 8\%$ il faut accepter un écart-type σ_P de 14%. Plus forte est l'exigence d'espérance de rentabilité, plus élevé est le risque qu'il faut accepter.

4 La diversification des portefeuilles

a) Considérations générales

Soit un portefeuille P quelconque, défini par les poids $x_1, x_2, \ldots, x_N$ alloués aux N actifs risqués (la somme des poids x_i est égale à 1) de sorte que sa rentabilité R_P est donnée par:

$$R_P = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \ldots + x_N R_N \tag{4}$$

L'espérance de rentabilité du portefeuille est la moyenne pondérée (par les poids x_i) des espérances de rentabilité de chacun des titres qui le composent ; la contribution de chaque titre i à la rentabilité de P est donc directement proportionnelle à sa rentabilité. Ce résultat démontré dans le cas de deux titre dans le paragraphe 2 précédent se généralise aisément au cas d'un portefeuille composé d'un nombre N quelconque de titres. En effet, soit un portefeuille P dont la valeur est 1 € en 0 avec x_i € alloués au titre i. Cette $i^{\text{ème}}$ composante de du portefeuille P prend la valeur $x_i\,(1+R_i)$ € en t=1. Dès lors, pour 1€ investi en 0, la valeur totale de P est donc $\sum_{i=1}^{N} x_i(1+R_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} x_i R_i = 1 + \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$ en $t=1$; donc $R_P = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$.

Nous pouvons mesurer le risque de ce portefeuille P par la variance (ou l'écart-type) de R_P. Mais ce qui est défendable au niveau du portefeuille est faux au niveau d'un titre individuel : en effet le risque induit par un titre individuel i pour l'investisseur détenant le portefeuille P doit se mesurer par la contribution de i au risque global affectant le rendement R_P. Une erreur de raisonnement consiste à mesurer le risque induit par i par la variance ou l'écart-type de R_i alors que c'est en fait *sa « corrélation » avec R_P qui constitue le facteur essentiel qui détermine ce risque.*

Pour faciliter la compréhension intuitive de cette dernière et importante assertion, considérons un titre i négativement corrélé avec le portefeuille P : quand les performances de P sont mauvaises, celles de i ont une forte probabilité d'être bonnes et *vice versa*. Le titre i a donc tendance *à tirer la rentabilité globale R_P vers sa moyenne* et par conséquent à réduire l'amplitude de ses variations, c'est-à-dire à réduire le risque global. *A contrario*, si le titre i

est fortement et positivement corrélé avec P, les fluctuations de sa rentabilité « s'ajoutent » en général à celles des autres titres et sa détention accentue le risque global.
Ces considérations intuitives conduisent donc à *associer le risque induit par un titre à la covariance de sa rentabilité avec celle du portefeuille* ($cov(R_i, R_P)$).
Nous allons préciser maintenant les considérations précédentes en examinant le cas particulier de titres dont les rentabilités sont statistiquement liées entre elles par un seul facteur.

b) La diversification dans le cadre du modèle de marché (dit aussi modèle diagonal ou modèle de Sharpe)

L'hypothèse qui suit, et qui conduit à la relation (5), constitue « le modèle de marché » ou le modèle diagonal, dû à W. Sharpe ; cette hypothèse n'est pas nécessaire à la validité des résultats présentés, qui ont un caractère plus général, mais elle permet une explication intuitive de la diversification et de ses limites.

Nous supposerons ci-après que l'incertitude affectant la rentabilité R_i de chaque titre est due :

- pour partie à la conjoncture globale représentée par la rentabilité R_m du marché boursier dans son ensemble et qui peut éventuellement être mesurée à partir d'un indice boursier. Cet aléa est commun à tous les R_i.
- pour partie à un facteur ε_i, spécifique au titre considéré, indépendant du précédent et indépendant de l'aléa ε_j spécifique au titre $j \neq i$.

Dès lors, la rentabilité d'un titre i quelconque est conforme à la relation (5) suivante :

$$\textbf{(5)} \qquad R_i = \mu_i + \beta_i (R_m - \mu_m) + \varepsilon_i$$

μ_i est non aléatoire et représente l'espérance de R_i. Le terme $\beta_i (R_m - \mu_m)$, exprime la réaction du rendement R_i aux fluctuations du marché : quand R_m est supérieur (inférieur) à sa moyenne μ_m, R_i est majoré (minoré) d'une fraction β_i de la différence $R_m - \mu_m$. Le coefficient β_i qui reflète donc la sensibilité de R_i aux variations de R_m s'appelle le bêta du titre i et joue un rôle essentiel dans la théorie du portefeuille. L'aléa représenté par $\beta_i R_m$ s'appelle *risque systématique* ou *non diversifiable*, pour des raisons développées plus avant.
Le terme ε_i est aléatoire (bien qu'il soit représenté par une lettre minuscule), d'espérance nulle, et représente le risque spécifique au titre i. On suppose qu'il est indépendant de l'indice de marché R_m et qu'en outre les différents ε_i sont indépendants entre eux. Les aléas ε_i sont appelés risques diversifiables pour des raisons qui seront éclaircies dans la suite.

La rentabilité R_p du portefeuille P s'écrit alors comme la somme de trois composantes. En effet, *(4)* et *(5)* impliquent que :

$R_p = (x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_N\mu_N) \quad + \quad (x_1\beta_1 + \ldots + x_N\beta_N)(R_m - \mu_m) \quad + \quad (x_1\varepsilon_1 + x_2\,\varepsilon_2 + \ldots + x_N\,\varepsilon_N)$

Soit :

$$(6) \qquad R_p = \underbrace{\mu_P}_{\textit{espérance}} + \underbrace{\beta_P(R_m - \mu_m)}_{\textit{aléa systématique}} + \underbrace{\varepsilon_P}_{\textit{aléa diversifiable}}$$

où :

$\mu_P = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_N\mu_N$ représente l'espérance de rentabilité du portefeuille P, égale à la moyenne pondérée des espérances des rentabilités des différents titres ;

$\beta_P(R_m - \mu_m) = (x_1\beta_1 + \ldots + x_N\beta_N)(R_m - \mu_m)$ correspond à la réaction du rendement du portefeuille P aux fluctuations du marché et $\beta_P = x_1\beta_1 + \ldots + x_N\beta_N$ dénote le bêta du portefeuille P qui *est donc égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent* ;

$\varepsilon_P = x_1\,\varepsilon_1 + x_2\,\varepsilon_2 + \ldots + x_N\,\varepsilon_N$ est égal à la somme des risques indépendants et spécifiques aux titres individuels, pondérés par les poids ; ε_P est indépendant de R_m puisque toutes ses composantes ε_i le sont.

Dès lors, en vertu de l'additivité des variances de ε_P et R_m qui résulte de leur indépendance, le risque total affectant R_P, $\sigma^2(R_P)$, peut s'écrire comme la somme de deux composantes:

$$\sigma^2(R_P) = \beta_P^2\,\sigma^2(R_M) + \sigma^2(\varepsilon_P)$$

La première composante ($\beta_P^2\,\sigma^2(R_M)$) constitue le risque systématique, irréductible par diversification, alors que la deuxième ($\sigma^2(\varepsilon_P)$) représente le risque diversifiable ou spécifique qui peut être, à la limite, annulé par diversification. En effet, la *loi des grands nombres qui s'applique à la somme des aléas indépendants ε_i constituant ε_P, permet d'annuler pratiquement ce dernier risque pourvu que le portefeuille P soit bien diversifié* (c'est-à-dire que N soit suffisamment grand et chaque x_i suffisamment petit) [10].

---

[10] Considérons, par exemple le cas particulier d'un portefeuille équi-pondéré formé de N titres risqués (chaque poids est donc égal à *1/N*). On peut écrire : $\varepsilon_P = \frac{1}{N}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N)$

et, du fait de l'indépendance des ε_i :

$\sigma^2(\varepsilon_P) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(\varepsilon_i) = \frac{1}{N} v^2$, où $v^2 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(\varepsilon_i)$ est la moyenne des variances des aléas spécifiques.

Le risque $\sigma^2(\varepsilon_P)$ est donc proportionnel au risque spécifique moyen et *inversement proportionnel au nombre de titres* : environ 95% du risque diversifiable est éliminé, en moyenne, avec 20 titres, et 99% avec 100 titres.

On comprend intuitivement que, dans le cas d'un grand nombre de ε_i indépendants, dont certains sont positifs et d'autres sont négatifs mais dont l'espérance est nulle, leur moyenne pondérée est toujours pratiquement nulle. C'est pourquoi la composante ε_i de chaque rentabilité R_i est appelée « risque diversifiable » car elle est pratiquement éliminée dans un portefeuille bien diversifié.

En revanche, la deuxième composante, $\beta_P(R_m - \mu_m)$, ne peut pas être éliminée par la diversification et constitue le seul réel aléa entachant la rentabilité d'un portefeuille bien diversifié. Pour ce dernier, les relations approximatives suivantes prévalent :

$$R_P \approx \mu_P + \beta_P(R_m - \mu_m) \quad ; \quad \sigma^2(R_P) \approx \beta_P^2 \sigma^2(R_m)$$

Exemple.

Considérons N titres et supposons que $\sigma(R_M) = 20\%$, que le modèle de marché est valide et que les N titres ont tous une rentabilité d'écart-type diversifiable $\sigma(\varepsilon_i)$ égal à 50% et un bêta égal à 0,9. Le modèle de marché implique :

$R_i = r + (R_m - \mu_m) + \varepsilon_i$, donc $\sigma^2(R_i) = \beta_i^2 \sigma^2_m + \sigma^2(\varepsilon_i) = 0{,}2824$

$\sigma^2(R_i)$ se décompose en effet en:

– un risque systématique = $\beta_i^2 \sigma^2_m = (0{,}9)^2 \times 0{,}04 = 0{,}0324$;

– un risque spécifique = $\sigma^2(\varepsilon_i) = 0{,}25$.

Considérons maintenant un portefeuille équi-pondéré, formé de ces N titres (le poids alloué à chaque titre est 1/N). Le bêta de ce portefeuille est égal à la moyenne de celui de ses composantes, soit $\beta_P = 0{,}9$, et sa rentabilité s'écrit : $R_P = r + 0{,}9 \times (R_m - \mu_m) + \varepsilon_P$

avec $\varepsilon_P = \frac{1}{N}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N)$ et $var(\varepsilon_P) = 0{,}25/N$.

Comme ε_P et R_m sont indépendants : $\sigma^2_P = var(0{,}9 \times R_m) + var(\varepsilon_P)$.

Le risque systématique peut se mesurer par $var(0{,}9 \times R_m) = [0{,}9 \times 0{,}2]^2 = 0{,}0324$ et le risque spécifique par $var(\varepsilon_P) = 0{,}25/N$.

Le risque spécifique est : prépondérant pour un titre (N=1) ; important pour un portefeuille peu diversifié (pour N = 10 il représente les trois quarts du risque systématique dans notre exemple) ; négligeable en regard du risque systématique pour un portefeuille bien diversifié (pour N = 80 il est dix fois plus faible que le risque systématique, dans notre exemple).

Section III

Analyse mathématique du choix des portefeuilles efficients

Cette section repose sur un appareil mathématique et statistique plus élaboré que celui auquel la section précédente fait appel. Le lecteur doit donc être familiarisé avec le calcul matriciel, les formes quadratiques et l'optimisation sous contraintes à l'aide du Lagrangien ; il trouvera en annexe quelques rappels succincts concernant ces outils.

1. Cadre général et notations

Nous considérons des investissements sur une période (0,1) où 0 désigne la date d'investissement (aujourd'hui) et 1 la date terminale (dans le futur). Nous supposons les positions courtes autorisées. Les variables soulignées sont des vecteurs ; un prime désigne un transposé. Sauf dans un cas signalé plus avant les variables et les vecteurs aléatoires sont représentés par des lettres capitales alors que les paramètres non aléatoires sont en minuscule. Les matrices, bien que non aléatoires, sont désignées par des majuscules, en gras.

a) Les actifs

N actifs risqués notés $i=1,\dots, N$ existent ; le prix de l'actif i est $S_i(t)$ avec $t = 0, 1$ et sa rentabilité est $R_i = \dfrac{S_i(1)-S_i(0)}{S_i(o)}$ (les éventuels dividendes sont incorporés dans $S_i(1)$) ; $\underline{S}(t) \equiv (S_1(t),\dots,S_N(t))'$ désigne le vecteur colonne des prix et $\underline{R} \equiv (R_1(t),\dots,R_N(t))'$ le vecteur colonne des rentabilités;

$\mu_i \equiv \mathrm{E}(R_i)$ est l'espérance de la rentabilité du titre i, $\sigma_i^2 \equiv$ variance (R_i) et $\underline{\mu} \equiv (\mu_i,\dots,\mu_N)'$ est le vecteur (colonne) des N rentabilités espérées ; $\sigma_{ij} \equiv \mathrm{cov}(R_i,R_j)$ et $\mathbf{V}$ est la matrice de variance - covariance (N × N) des N rentabilités dont le terme général est σ_{ij}.

Nous distinguons le cas où un actif sans risque existe de celui où un tel actif n'existe pas.
En sa présence, le N+1$^{\text{ème}}$ titre, appelé actif 0, donne une rentabilité certaine notée r (le taux d'intérêt). L'achat de cet actif peut être interprété comme un prêt au taux r et sa vente (ou émission ou position courte) comme un emprunt au même taux r.
Son prix est noté $S_0(t)$ ($t = 0, 1$) et l'on a : $S_0(1) = (1+r)\, S_0(0)$; bien que S_0 soit certain il est exceptionnellement désigné par une majuscule.
En présence d'un actif sans risque $\underline{S}(t) \equiv (S_0(t), S_1(t),\dots,S_N(t))'$ désignera le vecteur des N+1 prix alors que $\underline{R} \equiv (R_1(t),\dots,R_N(t))'$ représentera *les seules N rentabilités aléatoires*.

b) Les portefeuilles

Un portefeuille P peut être caractérisé soit par le nombre de titres (de chaque type) qu'il contient, soit par le poids attribué à chaque titre.

Dans le premier cas n_i représente le nombre de titres *i* contenus dans le portefeuille P.

Remarquons que $n_i > 0$ désigne une position longue et $n_i<0$ une position courte sur *i.*

Remarquons également que $n_i(0) = n_i(1) \equiv n_i$ car aucune transaction n'intervient en dehors de l'instant initial 0.

Dans le cas où le portefeuille est caractérisé par des poids , x_i désigne le poids *initial* alloué au tire *i* : $x_i = \dfrac{n_i S_i(0)}{X(0)}$.

Nous commençons par le cas où un actif sans risque n'existe pas.

(i) L' actif sans risque n'existe pas

Le portefeuille P peut alors être caractérisé par le vecteur N-dimensionnel : $\underline{n} = (n_1,\ldots,n_N)'$.

La valeur du portefeuille P, notée $X(t)$, est donc :

$$X(t) = \underline{n}'\,\underline{S}(t) \equiv \sum_{i=1}^{N} n_i\, S_i(t) \qquad t = 0, 1 \tag{7}$$

($\underline{n}'\underline{S}$ désigne donc un produit scalaire)

La rentabilité du portefeuille P est :

$$R_p = \frac{X(1) - X(0)}{X(0)} \quad \text{ou} \quad 1 + R_p = \frac{X(1)}{X(0)} \tag{8}$$

Par ailleurs $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_N)'$ est le vecteur (colonne) des poids initiaux qui caractérise le portefeuille P, à un facteur d'échelle près.

Par définition, la somme des poids est égale à 1 :

$\underline{x}'\,\underline{1} \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ ($\underline{1}$ désigne le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^N$).

Propriété fondamentale : la rentabilité R_p du portefeuille est égale à la somme pondérée par les poids x_i des différentes rentabilités R_i de ses composantes :

$$R_P = \underline{x}'\,\underline{R} \tag{9}$$

Cette relation, qui n'est autre que l'équation (4) de la section I précédente, peut être redémontrée formellement :

$$1 + R_p = \frac{X(1)}{X(0)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i S_i(1)}{X(0)} \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{n_i S_i(0)}{X(0)} \right) \frac{S_i(1)}{S_i(0)}$$

$= \sum_{i=1}^{N} x_i (1 + R_i) = 1 + \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$, donc $R_P = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$ qui est la relation (9).

Les expressions pour $E(R_P) \equiv \mu_P$ et variance$(R_P) \equiv \sigma^2_P$ résultent de (9) :

$$(10) \qquad \mu_P = \underline{x}'\underline{\mu}$$

$$(11) \qquad \sigma^2_P = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} = \underline{x}'\mathbf{V}\underline{x}$$

(ii) Un actif sans risque existe

Ici, un actif, noté 0, de rentabilité certaine r, existe. Par ailleurs, comme en (*i*), N actifs risqués existent et sont caractérisés par $\underline{R}$, $\underline{\mu}$ (vecteurs de $\mathbb{R}^N$) et $\mathbf{V}$ (matrice de variance covariance N × N).

Un portefeuille quelconque P peut alors être défini de deux façons équivalentes :

- soit par le vecteur « nombre de titres » : $\underline{n} = (n_0, n_1, \ldots, n_N)'$, (N+1) dimensionnel ;
- soit, à un facteur d'échelle près, par le vecteur de poids *sur les seuls actifs risqués* :

$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_N)'$, N dimensionnel. Le poids x_0 sur l'actif sans risque se déduit de $\underline{x}$ puisque la somme des N+1 poids est égale à 1 :

$$(12) \qquad x_0 = 1 - \underline{x}'\underline{1}$$

La propriété fondamentale selon laquelle la rentabilité du portefeuille est égale à la moyenne pondérée des rentabilités de ses composantes s'écrit, dans ce cas :

$$(13) \qquad R_P = x_0 r + \underline{x}'\underline{R} = r + \underline{x}'(\underline{R} - r\underline{1})$$

Dès lors :

$$(14) \qquad \mu_p = r + \underline{x}'(\underline{\mu} - r\underline{1})$$

$$(15) \qquad \sigma^2_P = \underline{x}'\mathbf{V}\underline{x}$$

On remarquera que (13) et (14) diffèrent de leurs homologues (9) et (10) alors que (15) est identique à (11).

c) *Propriétés de la matrice de variance - covariance et notion d'actifs redondants.*

La matrice de variance-covariance **V** de terme général $\sigma_{ij} = cov\ (R_i,R_j)$ possède toujours les propriétés suivantes :

- Elle est symétrique car $cov\ (R_i,R_j) = cov(R_j,R_i)$;
- Elle est semi-définie positive (s.d.p.). Rappelons que **V** est s.d.p. si pour tout $\underline{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$: $\underline{x}'\,\mathbf{V}\,\underline{x} \geq 0$

V est bien s.d.p car, pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^N : \underline{x}'\,\mathbf{V}\,\underline{x} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j\ \sigma_{ij} = var\ (\underline{x}'\underline{R}) \geq 0$

(une variance ne peut être négative).

Rappelons aussi qu'une matrice **V**, $(N \times N)$, est définie positive (d.p.) si, pour tout $x \neq 0 \in \mathbb{R}^N$: $\underline{x}'\mathbf{V}\underline{x} > 0$; il s'agit d'une condition plus forte que celle qui définit une matrice s.d.p. et on peut montrer qu'une matrice s.d.p est d.p. si et seulement si elle est inversible. Le caractère d.p. de la matrice de variance-covariance **V** a une interprétation financière en termes « d'actifs redondants ».

Définition :

On dit que les actifs risqués 1,…, N sont redondants s'il existe N + 1 scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N$, tels que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i R_i = \lambda_0$

En procédant, si nécessaire, à un changement d'échelle des λ_i, on peut supposer sans perte de généralité que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ et interpréter $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)'$ comme les poids d'un portefeuille composé de N actifs risqués. Le rendement $\underline{\lambda}'\underline{R}$ d'un tel portefeuille est sans risque (car $\underline{\lambda}'\underline{R} = \lambda_0$). Ce portefeuille duplique donc l'actif sans risque ; par ailleurs, si ce dernier existe et rapporte le taux d'intérêt r, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique: $\lambda_0 = r$.

Cette notion de redondance est devenue fondamentale en Finance moderne et est notamment utilisée pour évaluer des actifs redondants par arbitrage. De nombreux actifs redondants font l'objet d'importants développements dans cet ouvrage ; citons comme exemples : un call et un put Européen de même prix et date d'exercice qui forment avec leur sous-jacent un ensemble de trois titres redondants permettant de dupliquer l'actif sans risque ; un contrat à terme et son sous-jacent ; une part d'un OPVCM et les titres composant le portefeuille de ce dernier.

La proposition suivante permet de se prononcer sur la redondance ou la non redondance de N actifs risqués à partir de la matrice de variance-covariance de leurs rentabilités.

Critère de non redondance : La condition nécessaire et suffisante pour que les N actifs risqués $i = 1, \ldots, N$ soient non redondants est que la matrice de variance-covariance de leurs rentabilités soit définie positive.

<u>Démonstration</u>

Les N actifs sont non redondants $\Longleftrightarrow$ variance $(\underline{\lambda}'\underline{R}) > 0$ pour tout $\underline{\lambda} \neq 0$ (car autrement $\underline{\lambda}'\underline{R} = \lambda_0$ non aléatoire pour au moins un $\underline{\lambda} \neq 0$) $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{V}$ *d.p.*

Dans la suite nous supposerons que les N actifs risqués sont non redondants, donc que $\mathbf{V}$ est d.p. et par conséquent inversible.

d) Définition des portefeuilles efficients

Définition : un portefeuille $\underline{x}^*$ est efficient si, pour tout portefeuille $\underline{y}$: $\sigma_y < \sigma_{x^*}$ *implique* $\mu_y < \mu_{x^*}$ *et* $\sigma_y = \sigma_{x^*}$ *implique* $\mu_y \leq \mu_{x^*}$

Conformément aux notations précédentes μ_{x^*} et μ_y représentent les espérances de rentabilité des deux portefeuilles $\underline{x}^*$ et $\underline{y}$ alors que σ_{x^*} et σ_y dénotent les variances des deux rentabilités.

De manière équivalente $\underline{x}^*$ est efficient si pour tout portefeuille $\underline{y}$: $\mu_y > \mu_{x^*}$ *implique* $\sigma_y > \sigma_x{}^*$ et $\mu_y = \mu_{x^*}$ *implique* $\sigma_y \geq \sigma_{x^*}$.

2. Portefeuilles efficients et choix de portefeuilles en l'absence d'un actif sans risque et de contraintes sur les positions.

La définition de l'efficience implique qu'un portefeuille $\underline{x}^*$ efficient résout le programme d'optimisation suivant :

$Max\ E(R_x)$ sous la contrainte $var(R_x) = \sigma^2_{x^*} \equiv k$

En l'absence d'actif sans risque et de contrainte sur le signe des positions (les positions courtes sont permises), ce programme s'écrit, en termes de poids :

$$(P) \quad \underset{\underline{x} \in \mathbb{R}^N}{Max} \quad \underline{x}'\underline{\mu} \ , \ \text{sous deux contraintes :} \ \underline{x}'\mathbf{V}\underline{x} = k \ ; \ \underline{x}'\underline{1} = 1$$

a) Conditions du premier ordre et forme générale de la solution de (P)

Appelons, $L(\underline{x}, \theta, \lambda)$ le Lagrangien de *(P)* :

$$L(\underline{x}, \theta, \lambda) = \underline{x}'\underline{\mu} - \frac{\theta}{2}(\underline{x}'\mathbf{V}\underline{x} - k) - \lambda(\underline{x}'\underline{1} - 1)$$

où $\frac{\theta}{2}$ et λ désignent les deux multiplicateurs de Lagrange, positifs, associés aux deux contraintes.

Les conditions du premier ordre impliquent donc qu'existent deux scalaires positifs θ et λ tels que la solution $\underline{x}^*$ satisfait :

$$(16) \qquad \frac{\partial L}{\partial \underline{x}} = \underline{\mu} - \theta\mathbf{V}\,\underline{x}^* - \lambda\underline{1} = \underline{0}$$

Par ailleurs les deux contraintes doivent être satisfaites :

$$(17-a) \qquad \underline{x}^{*\prime}\,\mathbf{V}\underline{x}^* = k \qquad ; \qquad (17-b) \qquad \underline{x}^{*\prime}\,\underline{1} = 1$$

Les conditions du premier ordre (16) et (17) forment un ensemble de $N + 2$ équations ; compte tenu de la concavité du Lagrangien elles constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\underline{x}^*$ soit solution de *(P)* et fournissent $\underline{x}^*$ ainsi que θ et λ.

En effet, puisque nous avons supposé que les N actifs risqués sont non redondants (ils ne peuvent donc permettre de synthétiser l'actif sans risque qui, par ailleurs, est présumé ne pas exister), la matrice **V** est inversible et (16) équivaut à :

$$(18) \qquad \underline{x}^* = \frac{1}{\theta}\mathbf{V}^{-1}[\,\underline{\mu} - \lambda\underline{1}]$$

Les valeurs de θ et λ peuvent alors être obtenues à l'aide des deux contraintes (17).

b) Portefeuilles efficients et investisseurs quadratiques

On remarquera que, à une constante près, le Lagrangien du programme *(P)* est aussi celui du programme *(P')* suivant :

$$(P') : \text{Max } \underline{x}'\underline{\mu} - \frac{\theta}{2}\underline{x}'\mathbf{V}\underline{x} \quad \text{avec} \quad \underline{x}'\underline{1} = 1$$

Dès lors (P) et (P') doivent donner la même solution à condition de choisir dans *(P')* une valeur de θ égale à celle du multiplicateur de Lagrange qui résulte de *(P)*, et qui correspond au niveau de risque $\sigma^2_{x^*} = k$, choisi.

La fonction objectif de (P'), $E(R_x) - \frac{\theta}{2}\sigma^2(R_x)$, est celle d'un investisseur quadratique qui recherche le compromis optimal entre l'espérance et la variance de la rentabilité de son portefeuille et $\frac{\theta}{2}$ s'apparente à son aversion à l'égard du risque (car la variance pèse d'autant plus lourd, comparée à l'espérance, que θ est élevé).

Les conditions du premier ordre de *(P')* sont encore (16) et la forme de la solution est exprimée par (18), de même que pour le programme *(P)* ; mais θ est une *donnée* de *(P')* et non une *inconnue* comme dans *(P)*.

En fait *(P')* permet de caractériser tous les portefeuilles efficients : à chaque $\theta > 0$, *(P')* fait correspondre un portefeuille efficient particulier, $\underline{x}_\theta$, qui sera choisi par l'investisseur dont l'aversion à l'égard du risque est caractérisée par θ. Inversement, tout portefeuille efficient est solution de *(P')* pour une valeur particulière de $\theta > 0$.

La proposition suivante définit de manière précise le portefeuille $\underline{x}_\theta$, solution de *(P')* :

Proposition 1 : La solution $\underline{x}_\theta$ de *(P')* s'écrit :

$$\underline{x}_\theta = \underline{k}_1 + \hat{\theta}\,\underline{k}_2 \tag{19}$$

avec :

$$\hat{\theta} \equiv \frac{1}{\theta}$$, la tolérance au risque de l'investisseur

$$\underline{k}_1 \equiv \frac{\mathbf{V}^{-1}\underline{1}}{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\underline{1}} \tag{20}$$

$\underline{k}_1$ est le vecteur des poids du portefeuille de variance minimale ;

$$\underline{k}_2 \equiv V^{-1}\left[\underline{\mu} - \frac{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\underline{\mu}}{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\underline{1}}\,\underline{1}\right] \tag{21}$$

$\underline{k}_2$ représente une « position » dont la somme des poids est nulle ($\underline{1}'\,\underline{k}_2 = 0$).

L'ensemble des portefeuilles efficients est donc : $\{\,\underline{k}_1 + \hat{\theta}\,\underline{k}_2 \;/\; \hat{\theta} > 0\,\}$

<u>Démonstration</u>

Considérons d'abord le programme dont la solution $\underline{v}$ est le portefeuille de variance minimale : Min $\underline{x}'\mathbf{V}\underline{x}$ sous la contrainte $\underline{x}'\,\underline{1} = 1$ et montrons que $\underline{v}$ est bien $\underline{k}_1$ donné par (20).

En appelant 2γ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte, le Lagrangien s'écrit : $\underline{x}'V\underline{x} - 2\gamma\,\underline{x}'\underline{1}$ et la solution $\underline{v}$ obéit aux conditions du premier ordre :

$$V\underline{v} = \gamma\underline{1} \iff \underline{v} = \gamma\mathbf{V}^{-1}\,\underline{1}$$

La contrainte implique : $\underline{1}'\underline{v} = 1$, donc : $\gamma\, \underline{1}'\, \mathbf{V}^{-1}\, \underline{1} = 1$, soit : $\gamma = \dfrac{1}{\underline{1}'\,\mathbf{V}^{-1}\,\underline{1}}$

D'où : $\underline{v} = \dfrac{\mathbf{V}^{-1}\,\underline{1}}{\underline{1}'\,\mathbf{V}^{-1}\,\underline{1}}$, qui est $\underline{k_1}$ en vertu de (20).

Réécrivons maintenant la condition du premier ordre sous la forme (16) que la solution $\underline{x_\theta}$ de (P') (et de (P)) satisfait : $\underline{x_\theta} = \hat{\theta}\, \mathbf{V}^{-1}\,(\underline{\mu} - \lambda\underline{1})$ avec $\hat{\theta} \equiv \dfrac{1}{\theta}$.

Le multiplicateur λ s'obtient en écrivant que $\underline{x_\theta}$ satisfait la contrainte de (P'):

$$\underline{1}'\underline{x_\theta} = \hat{\theta}\,\underline{1}'\,\mathbf{V}^{-1}\,(\underline{\mu} - \lambda\,\underline{1}) = 1 \text{ , d'où : } \lambda = \frac{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\,\underline{\mu} - \theta}{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\,\underline{1}}$$

$$\text{donc } \underline{x_\theta} = \hat{\theta}\,\mathbf{V}^{-1}\left[\underline{\mu} + \frac{\theta - \underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\,\underline{\mu}}{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\,\underline{1}}\,\underline{1}\right]$$

, qui est (19), compte tenu de (20) et (21) .

Par ailleurs, $\underline{1}'\underline{k_2} = 0$ car $\underline{1}'\underline{x_\theta} = 1$ et $\underline{1}'\underline{k_1} = 1$.

Interprétation.

La proposition 1 s'interprète de la manière suivante : *tous les investisseurs* qui suivent le critère E-V et qui partagent le même horizon d'investissement (l'instant 1) construisent leur portefeuille à partir *des mêmes portefeuilles* $\underline{k_1}$ *et* $\underline{k_2}$. Le portefeuille $\underline{k_1}$ est choisi par un investisseur dont l'aversion au risque est infinie($\hat{\theta} = 0$) et qui minimise de ce fait la variance sans tenir compte de l'espérance de rentabilité. Un individu « normal », caractérisé par une tolérance à l'égard du risque $\hat{\theta}$, « ajoute » la position $\hat{\theta}\,\underline{k_2}$ à $\underline{k_1}$, ce qui augmente son risque mais aussi sa rentabilité espérée. Puisque $\underline{1}'\underline{k_2} = 0$, $\underline{k_2}$ est un « pseudo-portefeuille », ou plutôt un « vecteur de positions » *à somme de poids nulle*, ce qui signifie qu'il exige un investissement initial nul, les positions courtes finançant les positions longues.

Remarquons que la relation (19) est équivalente à :

$$\text{(19')} \qquad x_\theta = (1-\hat{\theta})\,\underline{k_1} + \hat{\theta}\,\underline{s}$$

où $\underline{s} \equiv \underline{k_1} + \underline{k_2}$ est un portefeuille efficient (choisi par l'investisseur dont la tolérance au risque $\hat{\theta} = 1$), dont la somme des poids est bien égale 1 (car $\underline{1}'\underline{s} = \underline{1}'\underline{k_1} + \underline{1}'\underline{k_2} = 1$), que l'on peut démontrer être celui qui maximise le ratio de Sharpe (*E(R)/σ(R)*).

Enfin la relation (19) permet également d'affirmer que le lieu des points représentatifs des portefeuilles efficients, ou frontière d'efficience, est :

- une parabole dans l'espace (σ^2, μ) ;
- une hyperbole dans l'espace (σ,μ)

En effet, il résulte directement de (19) que la frontière d'efficience, dans l'espace (σ^2, μ), a pour équations paramétriques celles d'une parabole :

$$E(R_\theta) = a + \hat{\theta}\, b$$

$$\sigma^2(R_\theta) = c + 2\,\hat{\theta}\, d + \hat{\theta}^2 e$$

avec : $\hat{\theta} \equiv \dfrac{1}{\theta}$; $a \equiv E(R_{k_1})$; $b \equiv E(R_{k_2})$; $c \equiv \sigma^2(R_{k_1})$; $d \equiv cov(R_{k_1}, R_{k_2})$; $e = \sigma^2(R_{k_2})$

En remplaçant $\hat{\theta}$ par $\dfrac{E(R_\theta)-a}{b}$ dans l'expression de $\sigma^2(R_\theta)$ on obtient bien une relation parabolique liant $\sigma^2(R_\theta)$ à $E(R_\theta)$ (et une relation hyperbolique liant $\sigma(R_\theta)$ à $E(R_\theta)$).

Réécrivons maintenant l'équation vectorielle (16) « ligne par ligne » :

(16') $\mu_i - \lambda = \theta \sum_{j=1}^{N} x_j^* \operatorname{cov}(R_i, R_j)$ pour $i = 1,\ldots, N$

Ces conditions conduisent, presque directement, à un critère d'efficience qui compte tenu de son importance (notamment pour la justification du MEDAF dans le chapitre suivant), sera formulé sous la forme d'une proposition.

Proposition 2 : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un portefeuille $\underline{x}^*$ quelconque soit efficient est qu'il existe deux scalaires $\theta \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ tels que :

$$\mu_i - \lambda = \theta\, cov\,(R_i, R_{x^*}) \quad pour\ i = 1,\ldots N$$

Remarquons que les deux scalaires θ et λ dépendent de $\underline{x}^*$ mais, pour un portefeuille $\underline{x}^*$ donné, sont les mêmes pour chacun des N titres i.

<u>Démonstration</u> : En partant de (16'), $\underline{x}^*$ est efficient si et seulement si $\exists\, \theta \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ tels que :

$$\mu_i - \lambda = \theta \sum_{j=1}^{N} x_j^*\ cov\,(R_i, R_j) = \theta\, cov\,(R_i, \sum_{j=1}^{N} x_j^* R_j) = \theta\, cov(R_i, R_{x^*})$$

(On utilise la bilinéarité de l'opérateur covariance).

$\mu_i - \lambda$ s'interprète comme une espérance de rendement « excédentaire » (par rapport à λ) et $cov(R_i,R_{x^*})$ comme la contribution du titre i au risque du portefeuille x^* ; en effet, en utilisant encore la bilinéarité de l'opérateur covariance :

$$\sigma^2_{x*} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i^* x_j^* \sigma_{ij} = \sum_{j=1}^{N} x_j^* \ cov(R_i , \sum_{j=1}^{N} x_j^* R_j)$$

Soit : $\sigma^2_{x*} = \sum_{j=1}^{N} x_j^* \ cov(R_i , R_{x*})$

$cov(R_i , R_{x*})$ apparaît bien comme la contribution du titre *i* (par unité de poids) au risque global σ^2_{x*} entachant R_{x*}.

La proposition 2 s'interprète donc de la manière suivante : un portefeuille $\underline{x}$* est efficient si et seulement si les poids sont alloués de sorte que « les excédents de rentabilité » $\mu_i - \lambda$ des différents titres soient proportionnels au risque qu'ils induisent (et qui est égal à $cov(R_i , R_{x*})$ pour le titre *i*) : dès lors, *une relation linéaire affine lie les rentabilités espérées des titres individuels à la covariance de leur rentabilité avec celle de tout portefeuille efficient*.

c) La séparation en deux fonds

Les conditions du premier ordre conduisent au théorème de séparation en deux fonds de F. Black.

Proposition 3 (Théorème de séparation en deux fonds de Black)

Considérons deux portefeuilles efficients quelconques $\underline{a}$ et $\underline{b}$.

(i) Toute combinaison convexe $u\,\underline{a} + (1-u)\underline{b}$ avec $u \in [0,1]$ est un portefeuille efficient ;

(ii) Tout portefeuille efficient $\underline{e}$ est une combinaison (non nécessairement convexe) des deux portefeuilles $\underline{a}$ et $\underline{b}$.

Démonstration :

Soit $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux portefeuilles efficients *quelconques*. D'après la proposition 2, il existe deux scalaires positifs θ_a et θ_b tels que : $\underline{a} = \underline{k_1} + \theta_a \underline{k_2}$; $\underline{b} = \underline{k_1} + \theta_b \underline{k_2}$

(i) Considérons une combinaison convexe $\underline{x}$ de $\underline{a}$ et $\underline{b}$, c'est à dire longue sur $\underline{a}$ et sur $\underline{b}$ de sorte que : $\underline{x} = u\underline{a} + (1-u)\underline{b}$ avec $u \in [0,1]$, soit :

$\underline{x} = \underline{k_1} + (u\theta_a + (1-u)\theta_b)\underline{k_2}$

Posons $\theta_x \equiv u\,\theta_a + (1-u)\,\theta_b$ et remarquons que $\theta_x \geq 0$ car $\theta_a \geq 0$, $\theta_b \geq 0$, $u \geq 0$ et $(1-u) \geq 0$

Dès lors, d'après la proposition 2, $\underline{x} = \underline{k_1} + \theta_x \underline{k_2}$ est efficient.

(ii) Considérons maintenant un portefeuille efficient $\underline{e}$ quelconque et montrons qu'il s'écrit comme une combinaison de $\underline{a}$ et $\underline{b}$ (non nécessairement convexe). Puisque $\underline{e}$ est efficient il existe $\theta_e \geq 0$ tel que : $\underline{e} = \underline{k_1} + \theta_e \underline{k_2}$

Considérons une combinaison de $\underline{a}$ et $\underline{b}$: $u\underline{a} + (1-u)\underline{b} = \underline{k_1} + (u\theta_a + (1-u)\theta_b)\underline{k_2}$

Pour que ce portefeuille « duplique » $\underline{e}$ il suffit de choisir u tel que :

$$u\theta_a + (1 - u)\,\theta_b = \theta_e \text{, soit : } u = \frac{\theta_e - \theta_b}{\theta_a - \theta_b}.$$

De façon plus générale on peut montrer que tout portefeuille correspondant à un point quelconque de l'hyperbole (y compris, ceux de la branche inférieure représentative des portefeuilles les plus inefficients) est une combinaison de *a* et de *b*.

Commentaires et interprétations: la proposition 3-(*i*) implique que tout portefeuille qui est une combinaison des « fonds » *a* et *b* à poids positifs sur ces deux fonds, tel que *e* , *intérieur* au segment curviligne (*a* , *b*), est efficient (cf. figure 9) ;

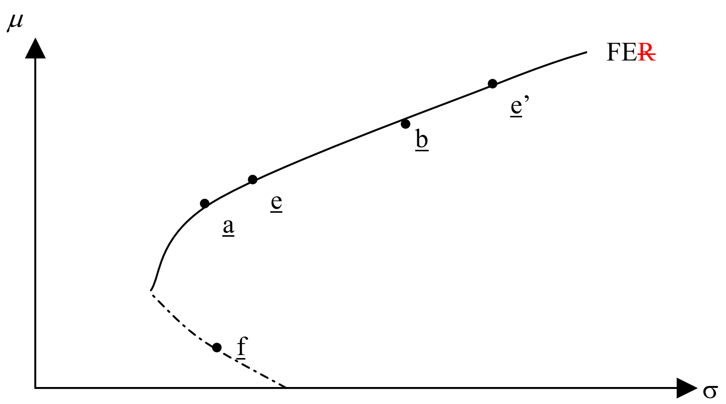


Figure 9

En revanche, une combinaison non convexe impliquant des poids $u < 0$ et $(1 - u) > 1$ (telle que f), n'est pas nécessairement efficiente (f est sur la branche inférieure de l'hyperbole représentative des portefeuilles *les plus inefficients*).

La proposition 3-(ii), réciproque de (i), affirme que tout portefeuille efficient (tel que *e* ou *e'*) est une combinaison de *a* et de *b* mais les poids alloués à ces deux portefeuilles ne sont pas nécessairement positifs (le portefeuille efficient *e*', par exemple, est obtenu à l'aide d'une position courte sur *a* ; $u < 0$, $(1 - u) > 1$).

En outre, on peut montrer que tous les portefeuilles de l'hyperbole (branches supérieure et inférieure) sont générés par les combinaisons de deux portefeuilles quelconques de l'hyperbole.

Ce résultat de séparation en deux fonds est important car il signifie que tous les investisseurs E – V partageant le même horizon d'investissement sont indifférents entre une situation dans laquelle ils ont la possibilité d'opérer sur un nombre très élevé d'actifs (N = plusieurs milliers) et une situation où les choix sont réduits aux combinaisons de deux fonds efficients quelconques seulement : *deux OPVCM bien gérés quelconques suffisent donc à satisfaire* *tous les investisseurs* ayant un horizon d'investissement commun; ils se contentent de les combiner selon des poids qui dépendent de leurs aversions à l'égard du risque.

3. Portefeuilles efficients en présence d'un actif sans risque, avec positions courtes autorisées ; séparation en deux fonds de Tobin

Nous supposons ici qu'un actif sans risque (l'actif 0 qui rapporte le taux d'intérêt r et constitue une opportunité d'investissement et de financement)s'ajoute aux N actifs risqués. Rappelons que les portefeuilles sont définis par les poids $\underline{x}^*$ sur les seuls actifs risqués, que $x_0^* = 1 - \underline{1}'\underline{x}^*$, et que $\underline{\mu}$ est le vecteur des rentabilités espérées des N actifs risqués.

La proposition 4 établit les principaux résultats valides dans ce contexte.

Proposition 4

(i) La frontière d'efficience dans l'espace (σ,μ) est la demi droite o-T issue de 0 et tangente en T à l'hyperbole FE représentative des portefeuilles efficients en l'*absence* d'actif sans risque (cf. figure 8).

(ii) Le point T représente le (seul) portefeuille efficient $\underline{t}$ qui ne contient que des actifs risqués

(iii) Tout portefeuille efficient peut être caractérisé comme une combinaison du portefeuille tangent et de l'actif sans risque (séparation en deux fonds de Tobin) ; plus généralement, **deux portefeuilles efficients quelconques permettent d'obtenir, par combinaison, un portefeuille efficient quelconque.**

(iv) Un portefeuille $\underline{x}^*$ est efficient si et seulement s'il existe un $\hat{\theta} \geq 0$ tel que :

$$(22) \qquad \underline{x}^* = \hat{\theta}\,\mathbf{V}^{-1}\,[\underline{\mu} - r\,\underline{1}]$$

(v) Le portefeuille $\hat{\theta}\ \mathbf{V}^{-1}\,[\underline{\mu} - r\,\underline{1}]$ est choisi par l'investisseur E – V caractérisé par un paramètre $\hat{\theta}$ de tolérance au risque.

(*vi*) Le portefeuille tangent est caractérisé par les poids : $\underline{t} = \dfrac{\mathbf{V}^{-1}\left[\underline{\mu} - r\underline{1}\right]}{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\left[\underline{\mu} - r\underline{1}\right]}$ (et $t_0 = 1 - \underline{t}'\underline{1}$)

<u>Démonstration</u>

Les résultats (*i*), (*ii*) et (*iii*) ont été obtenus en section II ; nous démontrons ici (*iv*), (*v*), et (*vi*).

Considérons l'investisseur qui résout le programme E-V :

$$\underset{\underline{x}}{\text{Max}}\ (1-\underline{x}'\underline{1})r + \underline{x}'\,\underline{\mu} - \frac{\theta}{2}\,\underline{x}'\,\mathbf{V}\underline{x} \text{ avec } \theta > 0 \text{ , sans contrainte.}$$

Remarquons qu'aucune contrainte sur les poids n'est ici requise car $\underline{x}$ représente les allocations sur les seuls actifs risqués et $x_0 = 1 - \underline{x}'1$ peut prendre des valeurs positives ou négatives quelconques.

A l'optimum $\underline{x}^*$ satisfait donc : $- r\,\underline{1} + \underline{\mu} - \theta\mathbf{V}\,\underline{x}^* = 0$ d'où, en notant $\hat{\theta} = \dfrac{1}{\theta}$:

$$\underline{x}^* = \hat{\theta}\ \frac{\mathbf{V}^{-1}\left[\underline{\mu} - r\underline{1}\right]}{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}\left[\underline{\mu} - r\underline{1}\right]}$$, ce qui démontre (*iv*) et (*v*).

Le portefeuille tangent étant lui-même efficient, il existe $\hat{\theta}_t > 0$ tel que : $\underline{t} = \hat{\theta}_t\ \mathbf{V}^{-1}\,(\underline{\mu} - r\underline{1})$.

Le portefeuille tangent ne contenant que des actifs risqués : $\underline{t}'\underline{1} = 1$, on a donc :

$$\hat{\theta}_t = \frac{1}{\underline{1}'\mathbf{V}^{-1}(\underline{\mu} - r\underline{1})}$$, ce qui prouve (*vi*).

Commentaires et interprétations

On se référera à la section II pour divers commentaires et interprétations des points (*i*), (*ii*) et (*iii*). Nous remarquons ici l'analogie très forte des résultats de *séparation prévalant en l'absence et en présence d'un actif sans risque* (résultats de séparation de Black et de Tobin, respectivement). *Dans les deux cas, deux portefeuilles efficients quelconques suffisent pour construire n'importe quel portefeuille efficient.*

Le résultat (*iv*) signifie que les vecteurs poids de tous les portefeuilles efficients sont homothétiques à $\mathbf{V}^{-1}[\underline{\mu} - r\underline{1}]$ et homothétiques entre eux ; d'après (*v*), l'investisseur caractérisé par une tolérance $\hat{\theta}$ choisit simplement les poids $\hat{\theta}\,\mathbf{V}^{-1}[\underline{\mu} - r\underline{1}]$ (il s'agit des poids sur les seuls actifs risqués).

Les résultat (*vi*) donne la composition exacte du portefeuille tangent $\underline{t}$ qui permet de caractériser n'importe quel portefeuille efficient de deux manières équivalentes :

- comme un portefeuille combinant l'actif sans risque et le portefeuille tangent, dans des proportions qui dépendent de la tolérance au risque de l'investisseur ;
- comme un portefeuille homothétique au portefeuille tangent $\underline{t}$.

Section IV

Quelques extensions du modèle standard

Le modèle de Markowitz présenté dans les sections précédentes constitue le modèle standard. Il repose sur différentes hypothèses qui ne sont pas toujours conformes à la réalité :

- Des positions courtes peuvent être constituées sans contraintes et sur tous les titres ;
- L'investisseur applique le critère espérance-variance ;
- L'investissement ne porte que sur une seule période ; plus précisément , dès que les allocations sont effectuées à l'instant initial aucune transaction n'est autorisée jusqu'à la fin de la période d'investissement (la stratégie est dite statique ou « buy and hold »).

Dans cette section nous allons examiner les conséquences d'un relâchement des deux premières hypothèses, le cas des stratégies dynamiques impliquant des réallocations inter-temporelles faisant l'objet du chapitre 18.

1. Les positions courtes sont interdites

Dans les analyses précédentes les positions courtes étaient présumées possibles. Quand elles ne sont pas autorisées, les choix sont évidemment restreints et les résultats précédents ne tiennent plus. En fait aucun résultat analytique ne peut être obtenu dans ce cas mais des méthodes de programmation quadratique donnent les résultats numériques. Il est cependant possible de décrire qualitativement la composition des portefeuilles efficients, comme dans ce qui suit. Nous examinerons successivement le cas d'absence et celui de présence d'un actif sans risque.

a) L'actif sans risque n'est pas disponible

En l'absence d'un actif sans risque, la frontière d'efficience n'est plus une hyperbole telle que celle qui est représentée dans les figures 7, 8 ou 9. En effet, les interdictions sur les positions courtes rendent moins favorables les compromis rentabilité-risque : pour un même ecart-type de rentabilité, la rentabilité espérée sera plus faible en présence de contraintes. Géométriquement cette situation, moins favorable, se traduit par une frontière d'efficience située au « sud est » de celle qui prévaut en absence de contraintes sur les positions, conformément à la figure 10 ci-dessous où la frontière en absence de contraintes est en pointillé et la frontière en présence des contraintes est en trait plein, rouge (il s'agit des frontières d'efficience en absence d'actif sans risque ; les deux frontières pourraient partiellement coïncider).

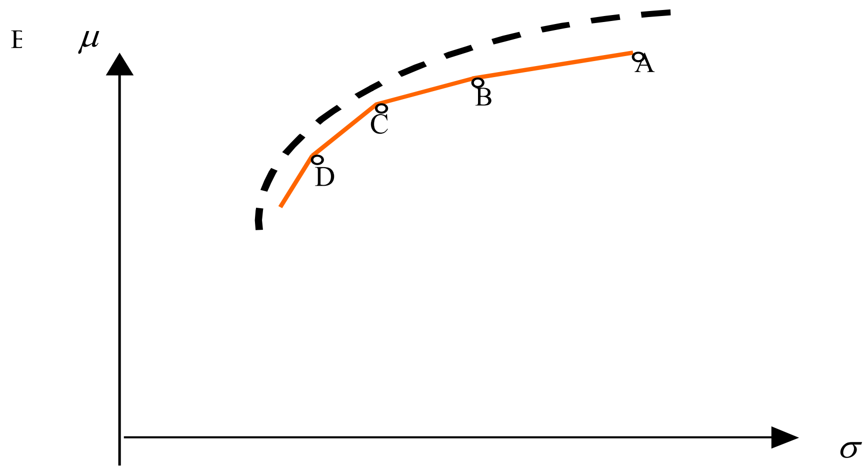


Figure 10

Nous allons décrire qualitativement la composition des portefeuilles efficients en allant du plus risqué (qui est aussi celui qui donne la plus forte rentabilité espérée) vers le moins risqué (de A vers D sur la figure). En absence d'actif sans risque le portefeuille dont l'espérance est maximum (il est donc efficace) est le portefeuille A constitué *exclusivement* d'un titre, appelé 1: celui dont la rentabilité espérée est maximum (il est donc impossible de se positionner à droite de A). Pour obtenir une rentabilité d'écart type légèrement plus faible à $\sigma_A = \sigma(R_1)$ il faut introduire au moins un titre supplémentaire 2 ; les combinaisons de 1 et 2 sont représentées par les points de la branche d'hyperbole AB, les déplacements de A vers B étant obtenus par une augmentation du poids alloué à 2. Si l'on souhaite obtenir un écart type inférieur à σ_B, il est optimal de faire intervenir de nouveaux titres. La réduction du risque est permise en combinant ces titres jusqu'à atteindre σ_C , à partir duquel une réduction supplémentaire du risque implique un nouvel ensemble de titres, etc. En absence d'actif sans risque, la frontière d'efficience est donc constituée d'une série de « segments hyperboliques » AB, BC, CD,.. formant une courbe FER continue (mais non dérivable aux points B, C, D,..). Les portefeuilles A, B, C, à partir desquels une réduction du risque implique l'introduction de nouveaux titres sont appelés des portefeuilles « corner ».

b) Un actif sans risque est disponible

En présence d'un actif 0, sans risque, permettant de placer et d'emprunter au taux r, et représenté sur la figure 11 par le point d'ordonnée r sur l'axe vertical, la frontière d'efficience est la tangente rT à FER (FER est la succession de branches d'hyperboles décrite en *a)*). Quand l'emprunt est permis au même taux que celui du prêt, des point situés sur rT à droite de T sont atteignables, tous les portefeuilles efficients sont des combinaisons du portefeuille tangent et de l'actif sans risque et un résultat de séparation en deux fonds prévaut, comme dans le cas standard où les positions courtes sont permises. Tel n'est pas le cas quand les positions courtes sur 0 (c'est-à-dire l'emprunt destiné à financer l'acquisition de titres risqués) sont interdites : la frontière d'efficience est alors rTA constituée du segment rT prolongé par la succession de branches d'hyperbole TA (cf. figure 11).

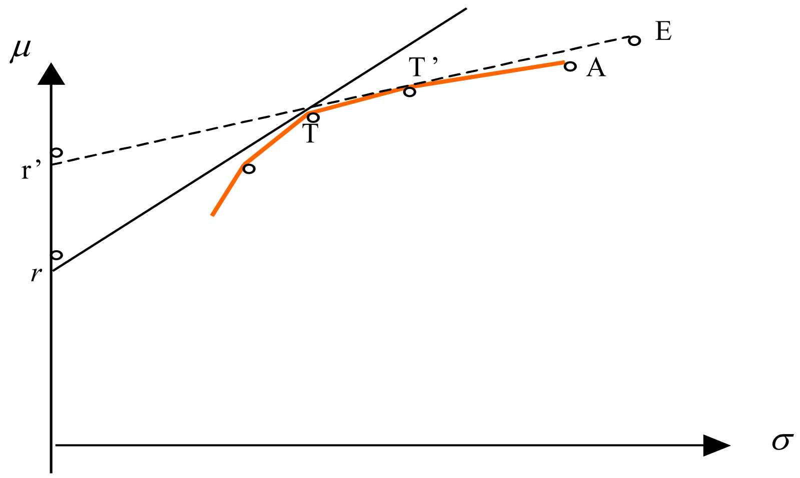


Figure 11

Quand l'emprunt est possible, mais à un taux *r'* plus élevé que celui du prêt, la frontière d'efficience est rTT'E qui se présente comme le segment *rT* prolongé par une ou plusieurs branches d'hyperbole telles que *TT'* puis par la demi droite T'E, où T' est le point de contact à FER de sa tangente issue de *r'*. Si le montant de l'emprunt est limité (ce qui revient à postuler une contrainte sur la position courte sur l'actif sans risque, à un niveau non nul toutefois), seul un segment à droite de T', tel que *T'E*, est atteignable.

2. Résultats de séparation quand les investisseurs maximisent une utilité espérée mais ne suivent pas le critère moyenne-variance (résultats de Cass et Stiglitz)

Les résultats de Black et de Tobin, présentés précédemment, constituent les théorèmes de séparation les plus connus et habituellement enseignés dans les cours de base en finance. Ils s'appliquent lorsque tous les investisseurs sont présumés: (i) utiliser un critère de moyenne-variance dans leur sélection de portefeuille (ou si les rendements des actifs sont normaux); (ii) avoir un horizon d'investissement identique, en général une année; (iii) mettre en oeuvre des stratégies statiques de portefeuille sans possibilité de révision d'aucune sorte (ou *buy and hold*); (iv) avoir des anticipations homogènes (mêmes estimations quant aux espérances,

variances et corrélations des rendements).
Les hypothèses (ii), (iii) et iv) seront relâchées dans le chapitre 18 et des résultats de séparation plus généraux seront alors présentés. Dans ce paragraphe, nous nous contentons d'examiner les conséquences d'un comportement plus général et plus « rationnel » : celui d'investisseurs qui ne suivent pas le critère MV mais qui maximisent une utilité espérée.

Cass et Stiglitz (1970) ont généralisé le théorème de séparation de Black-Tobin et caractérisé les conditions requises pour obtenir un théorème de séparation en deux fonds qui prévaut quand les investisseurs maximisent l'espérance d'une fonction d'utilité HARA. Rappelons qu'une fonction d'utilité est de type HARA si elle s'écrit : $U(X) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{X-\theta}{\gamma}\right)^{1-\gamma}$ avec quelques restrictions sur les coefficients et domaines de définition.

Cass et Stiglitz (1970) ont montré que tous les investisseurs HARA *partageant le même paramètre* γ (mais différant par leurs richesses initiales et par le paramètre θ) peuvent choisir leur portefeuille de façon optimale en combinant les deux mêmes fonds[11]. L'actif sans risque, quand il existe, peut être choisi comme l'un des deux fonds. Etant donné que tous les investisseurs quadratiques (moyenne-variance) sont des investisseurs HARA partageant le même paramètre γ (en faisant tendre γ vers *-1*), les théorèmes de séparation en deux fonds de Tobin et Black sont des cas particuliers de la séparation de Cass et Stiglitz. Le Tableau 1 ci-dessous présente de manière plus détaillée les conditions de validité de ce théorème de séparation en deux fonds.

Tableau 1 **Conditions de satisfaction du théorème de séparation en deux fonds**

Existence d'un actif sans risque	Fonctions HARA
Pas d'actif sans risque	Quadratiques (γ=*1*) ou CRRA (Constant Relative Risk Aversion, obtenue pour θ=0)

3. Eléments de finance comportementale

Manque ce paragraphe de quelques lignes

[11] Voir Ingersoll (1987) pour une présentation approfondie des résultats Cass et Stiglitz.

Annexes

Annexe A

L'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern et l'espérance d'utilité

La théorie de Von Neumann et Morgenstern repose sur plusieurs axiomes concernant les préférences des agents face à des alternatives risquées. Nous décrivons les objets de choix sur lesquels portent ces préférences avant de présenter les axiomes qui conduisent au critère de l'espérance de l'utilité introduit à la section I -1 de ce chapitre.

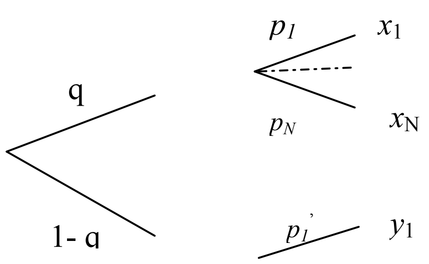
a) Les objets de choix

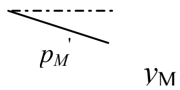
Les individus comparent différentes alternatives risquées ou loteries, comme dans la section I-1 de ce chapitre, qui vont être définies ici de façon plus précise.

Les loteries sont construites à partir de lots qui peuvent être constitués de biens physiques ou monétaires ou de tout objet « utile » (panier de biens de consommation, cadeaux, euros…). On notera par des minuscules en italiques (par exemple x, y,…) ces différents lots formant un ensemble ***C*** à partir duquel les loteries vont être définies.

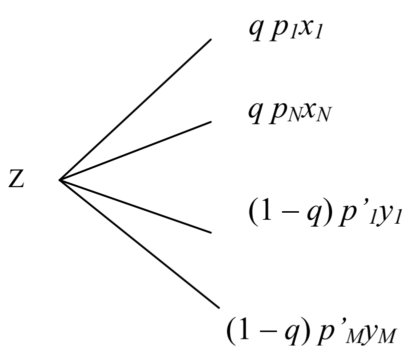
Une loterie simple X donne un lot x, avec une probabilité p_1 un lot x_2 avec une probabilité p_2,. . . , un lot x_N avec une probabilité p_N (avec $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$). On notera X ≡ ($\underline{x}$, $\underline{p}$) une telle loterie.

Un cas particulier de loterie simple est celui d'une loterie à résultat certain qui donne le lot x avec une probabilité égale à 1. Une loterie au résultat certain (x ; 1), sera notée simplement x (comme le lot qu'elle attribue avec certitude) ; l'ensemble des loteries à résultat certain pourra donc être identifié à l'ensemble des lots ***C***. On considérera aussi des loteries composites, par exemple celle qui donne soit une loterie simple X (≡ ($\underline{x}$, $\underline{p}$)) avec une probabilité q, soit une loterie simple Y (≡ ($\underline{y}$, $\underline{p}'$)), avec une probabilité (1-q) ; on notera (X, Y ; q) une telle loterie composite et on la représentera par le schéma suivant :





Comme on le verra dans la suite (cf. l'axiome 4 ci-dessous), l'individu rationnel est censé être indifférent entre la loterie composite (X, Y ; q) et la loterie simple Z qui donne les mêmes résultats finaux, affectés des mêmes probabilités, définie par le graphe ci-dessous :



Ce principe d'indépendance postule qu'un individu rationnel n'est concerné que par le résultat final (et sa probabilité d'occurrence) et non par la procédure d'attribution de ce résultat (loterie simple ou composite).

Dans la suite $\mathcal{L}$ représentera l'ensemble des loteries construites sur $\boldsymbol{E}$ (à résultats certains, simples ou composites) qui doivent être comparées et hiérarchisées par ordre de préférence, par les individus considérés. On supposera que $\mathcal{L}$ contient toutes les loteries à résultat certain, soit $\mathcal{L} \supset \boldsymbol{C}$.

Dans l'hypothèse où les lots sont constitués de sommes monétaires (euros) $\boldsymbol{C}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ présumé borné inférieurement par a et supérieurement par b. Dans le cas général a désigne le lot *le moins favorable et b* le lot *le plus favorable*, pour l'individu considéré.

b) les axiomes concernant les préférences

D'après Von Newmann et Morgenstern les axiomes qu'un individu rationnel doit respecter sont les suivants[12] :

Axiome 1 (comparabilité) : Pour tout X et Y $\in \mathcal{L}$ tout individu:

---

[12] Nous ne présentons pas ci-dessous le système d'axiomes le plus « parcimonieux » mais celui qui conduit à une justification relativement simple du critère de l'espérance de l'utilité.

- soit préfère X à Y ; on écrira $X \succ Y$
- soit préfère Y à X ; on écrira $Y \succ X$
- soit est indifférent entre X et Y ; on écrira $X \sim Y$ et on dira que X est équivalent à Y (pour l'individu considéré).

  On notera par $\succcurlyeq$ la préférence ou indifférence ($X \succcurlyeq Y$ si $X \succ Y$ ou $X \sim Y$)

<u>Axiome 2</u> (transitivité) : Pour tout X, Y, et Z $\in \mathcal{L}$ et tout individu rationnel :

$$X \succcurlyeq Y \text{ et } Y \succcurlyeq Z \text{ implique : } X \succcurlyeq Z$$

Cet axiome exprime simplement une condition de cohérence des choix.

<u>Axiome 3</u> (réflexivité) :$X \succcurlyeq X$ pour tout X $\in \mathcal{L}$.

Cet axiome est quasiment tautologique.

Du fait de ces trois premiers axiomes, la relation $\succcurlyeq$, représentant les préférences d'un individu rationnel quelconque, est un pré-ordre sur $\mathcal{L}$.

<u>Axiome 4</u> (indépendance) : Pour tout X, Y $\in \mathcal{L}$:

$(X, Y ; q) \sim Z$ où Z est la loterie simple $(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M ; \underline{\pi})$, avec :

$\underline{\pi} = (qp^X{}_1, \dots, qp^X{}_N, (1 - q)\, p^Y{}_1, \dots, (1 - q)\, p^Y{}_M)$

La signification de ce principe d'indépendance a été expliquée au paragraphe *a)* précédent.

<u>Axiome 5</u> (continuité) :

Pour toutes les loteries X, Y, Z $\in \mathcal{L}$ avec $X \succ Z$ et $X \succcurlyeq Y \succcurlyeq Z$, il existe un paramètre $p \in [0,1]$ unique tel que $(X, Z ; p) \sim Y$

Naturellement, p dépend des préférences de l'individu ainsi que de X, Y, et Z.

<u>Axiome 6</u> (dominance 1) :

Soit $X = (x_1, x_2\,; p)$ et $Y = (x_1, x_2\,; p')$ avec $x_1 \succ x_2$.

$X \succ Y$ si et seulement si $p \succ p'$; $X \sim Y$ si et seulement si $p = p'$.

Axiome 7 (dominance 2) :

Considérons deux loteries composites L = (X, Y ; p) et L' = (X, Z ; p)

$L \succ L'$ si et seulement si $Y \succ Z$; $L \sim L'$ si et seulement si $Y \sim Z$

Cet axiome implique notamment qu'en remplaçant dans une loterie un des lots par un lot équivalent, on obtient une deuxième loterie équivalente à la première.

c) le critère de l'espérance utilité

Sur la base de ces sept axiomes, il est possible, en deux étapes, d'établir la validité du critère de l'espérance de l'utilité.

Etape 1 : Construction d'une fonction d'utilité U reflétant les préférences sur les résultats certains *C*.

Nous allons construire une fonction particulière U, de ***C*** dans ℝ qui préserve (ou reflète) les préférences sur ***C***, ce qui signifie que, pour tout x et $y \in \boldsymbol{C}$:

$U(x) > U(y)$ si et seulement si $x \succ y$; $U(x) = U(y)$ si et seulement si $x \backsim y$.

Toute fonction U qui préserve les préférences est qualifiée de fonction d'utilité valide.

Commençons par fixer, arbitrairement, les deux bornes U(a) et U(b) en rappelant que a est le plus mauvais lot et b le meilleur. Comme on gradue un thermomètre en fixant à 0 la température de la glace fondante et à 100 celle de l'eau bouillante, posons $U(a) = 0$; $U(b) = 1$. Considérons maintenant un résultat certain x, quelconque dans ***C***. En vertu de l'axiome 5 (continuité), il existe $p(x) \in [0,1]$, unique, tel que $(b, a\,; p(x)) \sim x$. On définit ainsi une application de ***C*** dans [0,1] qui va être l'indicateur d'utilité *défini sur **C*** car on va poser, pour tout $x \in \boldsymbol{C}$: $U(x) = p(x)$.

En vertu de l'axiome 6 (dominance 1), une telle fonction U(x) préserve les préférences ; en effet:

$x \succ y$ si et seulement si $p(x) = U(x) \succ U(y) = p(y)$; $x \backsim y$ si et seulement si $U(x) = U(y)$.

La fonction U, ainsi définie, constitue donc une fonction d'utilité valide sur ***C***.

Notons que la fonction U n'est qu'un choix possible parmi une infinité de fonctions d'utilité valides sur ***C***. Ainsi toute fonction V déduite de U par une transformation monotone croissante quelconque ($V(x) = f(U(x))$ avec f croissante) préserverait aussi les préférences sur ***C***.[13]

<u>Etape 2</u> : justification du critère de l'espérance de l'utilité en tant qu'expression des préférences sur $\mathcal{L}$

Nous allons maintenant comparer des loteries de $\mathcal{L}$ conduisant à des résultats incertains.

Considérons $X = (x_1, \ldots, x_N\,;\, p_1, \ldots, p_N)$ et posons $E(U(X)) \equiv \sum_{i=1}^{N} p_i\, U(x_i)$

où U désigne la fonction d'utilité, définie sur ***C***, construite dans l'étape 1.

<u>Proposition</u> :

$X \longrightarrow E(U(X))$ constitue une application de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{R}$ qui préserve les préférences, c'est-à-dire que, pour tout X et X' $\in \mathcal{L}$:

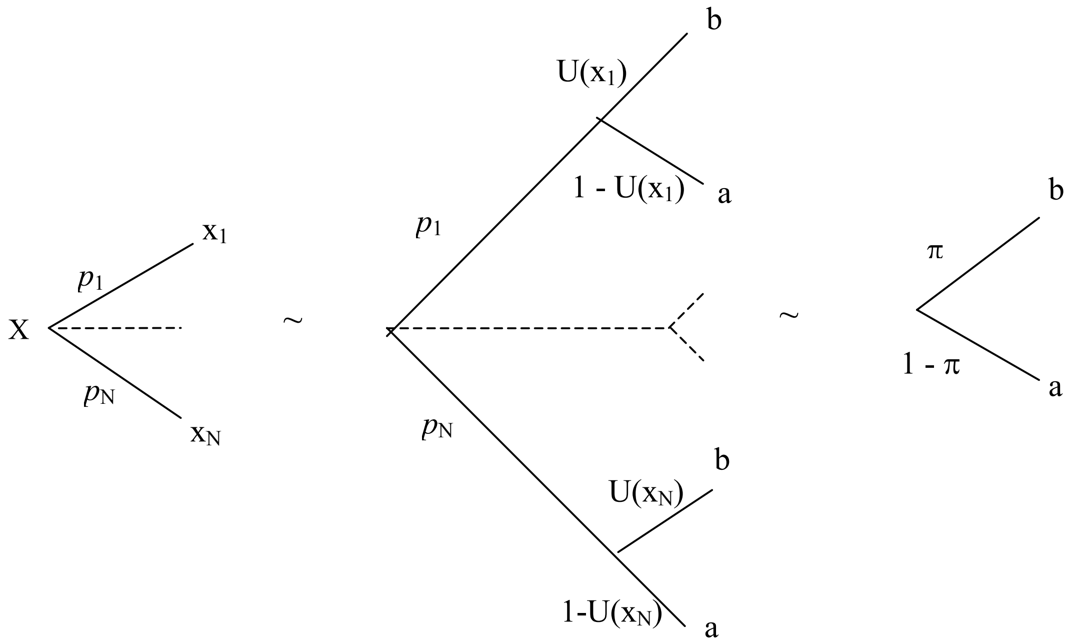
$X \succ X'$ si et seulement si $E[U(X)] > E[U(X')]$

$X \backsim X'$ si et seulement si $E[U(X)] = E[U(X')]$

<u>Démonstration</u> :

Considérons la loterie simple $X = (x_1, \ldots x_N\,;\, p_1, \ldots, p_N)$ représentée par le graphe X (ci-dessous à gauche).

[13] Mais elle ne pourrait pas servir de base à la représentation des préférences sur des résultats incertains (à l'aide du critère E(V(•)), l'espérance de V(•)), sauf si f est une transformation linéaire affine (cf. infra).



Graphe X

Graphe Y

Graphe Z

Rappelons que $x_i \backsim (b, a\ ;\ \mathrm{U}(x_i))$ pour $i = 1,\dots,N$.

Dès lors, en vertu de l'axiome 7 (dominance 2), X est équivalent à la loterie composite Y représentée sur le graphe Y (chaque x_i de X a été « remplacé » par la loterie équivalente $(b, a\ ;\ \mathrm{U}(x_i))$) ; par ailleurs, en vertu de l'axiome 4 (indépendance), Y est elle-même équivalente à la loterie Z = $(b, a\ ;\ \pi)$ du graphe Z, avec :

$$\pi = \sum_{i=1}^{N} p_i\, \mathrm{U}(x_i) = \mathrm{E}\,[\mathrm{U(X)}]$$

Considérons maintenant une autre loterie X' de $\mathcal{L}$ avec X' = $(x'_1, \dots x'_M\ ; p'_1,\ \dots,\ p'_M)$ et

$$\mathrm{E[U\ (X')]} = \sum_{j=1}^{M} p'_j\, \mathrm{U}(x'_j)$$

En vertu d'un raisonnement analogue à celui développé pour X :

$$\mathrm{X'} \sim (b, a\ ;\ \pi')\ \text{avec}\ \pi' = \mathrm{E}\,[\mathrm{U(X')}]$$

et en vertu de l'axiome 6 (dominance 1):

$X \succ X'$ si et seulement si $\pi = E[U(X)] > E(U(X')) = \pi'$

$X \sim X'$ si et seulement si $\pi = E(U(X)) = E(U(X')) = \pi'$

Ce qui prouve que E (U(•)) préserve les préférences sur $\mathcal{L}$, ce que l'on voulait démontrer.

d) Remarques et compléments

- La notion de « lots » utilisée dans les développements précédents est très générale. Elle accommode donc situations très diverses telles que des vecteurs de biens de consommation, ou plus simplement la consommation agrégée, considérées en Economie. Nous avons déjà remarqué que, dans le cas particulier où ces lots sont simplement constitués de sommes d'argent, ***C*** est tout simplement un sous-ensemble de **R** borné inférieurement par *a* (le plus petit gain, éventuellement négatif) et supérieurement par *b* ; nous avons aussi remarqué que, dans ce cas, le pré-ordre $\succcurlyeq$ sur ***C*** se traduit, pour tout individu rationnel, par la relation ≥ (supérieur ou égal) car les individus rationnels sont présumés vouloir toujours plus de richesse. Dans ce cas la fonction d'utilité U définie en *b)* est tout simplement *l'utilité de la richesse* qui est, en fait, la seule acception utilisée dans ce livre.

- Nous avons remarqué, dans la section I de ce chapitre, que la fonction d'utilité n'est définie qu'à une transformation linéaire affine près (V = aU + b avec a > 0 conduit au même classement que U en termes d'espérance d'utilité) ; dans la construction de la fonction U du paragraphe *b)*, ces « deux degrés de liberté » dans la définition de la fonction d'utilité correspondent simplement à la flexibilité conférée par la fixation des deux valeurs extrêmes U(*a*) et U(*b*).

- La théorie de l'espérance de l'utilité n'est pas présentée dans cet ouvrage, ni sous sa forme la plus générale, ni avec le maximum de parcimonie en matière d'axiomes. Notons simplement qu'une version de cette théorie, due à Savage (1954), évite d'avoir recours à des probabilités objectives préalables mais *déduit* la nécessaire utilisation de probabilités subjectives ou objectives pour toute prise de décision rationnelle dans un contexte d'incertitude. Cette approche répond donc aux objections de ceux qui contestent la pertinence de la notion de probabilité (objective ou même subjective) pour les prises de décision dans le monde réel.

- Le bien-fondé de la théorie de Von Neumann et Morgenstern est souvent contesté, à l'appui d'arguments convaincants, tant sur le plan théorique qu'empirique. Citons à ce sujet le paradoxe d'Allais (critique d'ordre théorique) ainsi que les travaux empiriques récents de la Finance comportementale (initiée par les travaux de Kahneman et Tversky) dont l'exposé sortirait du cadre fixé à cet ouvrage. Le paradigme de l'espérance de l'utilité n'en demeure pas moins la pierre angulaire des théories économique et financière des choix dans l'incertain.

Annexe B
Rappel sur les formes quadratiques et le calcul des gradients

- Considérons un élément $\underline{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_N)'$ de $\mathbf{R}^N$, un prime désignant un transposé et le souligné un vecteur ($\underline{x}$ est donc un vecteur colonne) et une matrice carrée N×N notée **A** et de terme général a_{ij}. Rappelons que **A** permet de définir une forme quadratique par:

$$\underline{x}'\mathbf{A}\,\underline{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$$

Dans le cas N= 2 par exemple : $\underline{x}'\mathbf{A}\,\underline{x} = x_1^2 a_{11} + x_1 x_2 a_{12} + x_2 x_1 a_{21} + x_2^2 a_{22}$; Dans le cas particulier d'une matrice A symétrique ($a_{12} = a_{21}$) : $\underline{x}'\mathbf{A}\,\underline{x} = x_1^2 a_{11} + 2\, x_1 x_2 a_{12} + x_2^2 a_{22}$

- Considérons une fonction f de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$, dérivable par rapport à chacune de ses composantes, et notons $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(\underline{x})$ le gradient de f, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\underline{x}) \right)'$$

Dans le cas particulier de la forme quadratique $\underline{x}'\mathbf{A}\,\underline{x}$ on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\underline{x}'\mathbf{A}\,\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{N} x_k \left(\sum_{j=1}^{N} a_{kj} x_j \right) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{N} x_k a_{ki}$$, soit la $i^{ème}$ ligne du vecteur $\mathbf{A}\underline{x} + \mathbf{A}'\underline{x}$.

On peut donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}(\underline{x}'\mathbf{A}\,\underline{x}) = \mathbf{A}\,\underline{x} + \mathbf{A}'\underline{x}$$

Et quand **A** est symétrique (ce qui est le cas d'une matrice de variance-covariance) :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}(\underline{x}'\mathbf{A}\,\underline{x}) = 2\mathbf{A}\,\underline{x}$$

Annexe C

Espérances, variances et covariances : définitions et règles de calcul

Définitions et rappels

Nous considérons, d'abord deux variables aléatoires X et Y dont les espérances (ou moyennes) sont notées $E(X)$ et $E(Y)$, leurs variances σ^2_X et σ^2_Y, et leur covariance $cov(X, Y) \equiv \sigma_{XY}$. On rappelle que :

$\sigma^2_X = E\{[X-E(X)]^2\} = E[X^2]-[E(X)]^2$; $\sigma_{XY} = E\{[X-E(X)]\,[Y-E(Y)]\} = E(X\,Y) - E(X)E(Y)$

Par ailleurs le coefficient de corrélation entre X et Y, noté ρ_{XY}, est donné par : $\rho_{XY} = cov(X, Y)/\sigma_X\sigma_Y$ et le coefficient de détermination (R^2) de la régression linéaire de X sur Y (ou vice versa) est égal à $(\rho_{XY})^2$.

Règles de calcul

Les règles suivantes résultent des définitions précédentes.

- L'opérateur $cov(\bullet,\bullet)$ est symétrique : $cov(X, Y) = cov(Y, X)$ et $cov(X, X) = var(X)$
- Considérons un nombre réel (scalaire non aléatoire) λ, et la variable aléatoire λX.

  $E(\lambda X) = \lambda E(X)$ (opérateur linéaire)

  $var(\lambda X) = \lambda^2 var(X)$
- Considérons deux variables aléatoires R_1 et R_2, deux scalaires x_1 et x_2 et la variable aléatoire $x_1R_1+x_2R_2$. Nous obtenons :

$E(x_1R_1 + x_2R_2) = x_1E(R_1) + x_2E(R_2)$

$var(x_1R_1 + x_2R_2) = x_1^2 var(R_1) + x_2^2 var(R_2) + 2x_1x_2 cov(R_1,R_2)$

Et dans le cas particulier de variables non corrélées :

$var(x_1R_1 + x_2R_2) = x_1^2 var(R_1) + x_2^2 var(R_2)$

L'opérateur $cov(\bullet,\bullet)$ est linéaire par rapport à chacun de ses arguments (on dit qu'il est bilinéaire) :

$\mathrm{Cov}\,(x_1R_1+x_2R_2, X) = \mathrm{Cov}\,(X, x_1R_1+x_2R_2) = x_1\, cov(R_1,X) + x_2\, cov(R_2, X)$

- Les formules précédentes s'étendent au cas de N variables aléatoires $R_1,\dots,R_N$ et N scalaires $x_1,\dots,x_N$.

On note : $\mu_i \equiv E(R_i)$; $\sigma_i^2 \equiv var\,(R_i)$; $\underline{\mu} \equiv (\mu_1,\dots,\mu_N)'$ (un vecteur colonne); V est la matrice de variance - covariance ($N \times N$) des R_i, dont le terme général est $cov(R_i,R_j)$.

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i = \underline{x}' \underline{\mu} \qquad \text{(linéarité)}$$

$$\text{Cov}\,\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i \;, X\right) = \text{cov}\left(X, \sum_{i=1}^{N} x_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i \,\text{cov}(R_i \;, X) \quad \text{(bilinéarité)}$$

$$var\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i\right) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i, \sum_{j=1}^{N} x_j R_j\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i \,\text{cov}\left(R_i, \sum_{j=1}^{N} x_j R_j\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \,\text{cov}\left(R_i, R_j\right) = \underline{x}' V \underline{x}$$

Dans le cas particulier de variables R_i non corrélés entre elles :

$$var\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} \;\text{var}\left(R_i\right).$$

Annexe D

Rappels sur les méthodes d'optimisation sous contraintes

a) Optimisation quand les contraintes prennent la forme d'égalités.

Il s'agit de trouver l'élément de $\mathbf{R}^N$ noté $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots , x_N^*)$ qui maximise (ou minimise) une fonction de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$, dont les valeurs sont notées $f(x_1, x_2, \ldots , x_N) = f(\underline{x})$, en imposant à $\underline{x}^*$ de satisfaire M contraintes qui s'écrivent $g_1(\underline{x}^*) = c_1$; … ; $g_M(\underline{x}^*) = c_M$ (les c_i étant des constantes).

Les deux programmes de maximisation et de minimisation s'écrivent, de manière compacte :

$\underset{\underline{x}}{Max}\; f(\underline{x})$ s.c.: $g_1(\underline{x}) = c_1$. ; … ; $g_M(\underline{x}) = c_M$. ; ou : $\underset{\underline{x}}{Min}\; f(\underline{x})$ s.c. : $g_1(\underline{x}) = c_1$; … ; $g_M(\underline{x}) = c_M$.

Dans le cas du programme *Max* on supposera que f est une fonction concave ou linéaire et les g_i sont convexes ou linéaires, et dans le cas du programme *Min* on supposera f convexe ou linéaire et les g_i concaves ou linéaires; dans les deux cas f et les g_i sont présumées dérivables par rapport à leurs N arguments.

La solution de ces problèmes d'optimisation peut être obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui consiste :

- à associer à chaque contrainte c_i un paramètre λ_i appelée multiplicateur de Lagrange ;
- à définir une fonction de $N+M$ variables, appelée le Lagrangien, par :

$$L(\underline{x},\underline{\lambda}) = f(\underline{x}) - \lambda_1\,[g_1(\underline{x}) - c_1] - \ldots - \lambda_M\,[g_M(\underline{x}) - c_M]$$

- à chercher les valeurs $\underline{x}^*$ et $\underline{\lambda}^*$ (N+M inconnues) qui maximisent (ou minimisent) $L(\underline{x},\underline{\lambda})$ *sans contraintes* (programme L) dont on peut montrer les propriétés suivantes :
  - $\underline{x}^*$, qui maximise (ou minimise) L, maximise (minimise) aussi f sous contraintes ;

- λ_i^* est égal à l'accroissement de f permis par un relâchement unitaire de la $i^{ème}$ contrainte (qui devient donc $g_i(\underline{x}) = c_i+1$) ; λ_i^* s'interprète donc comme le « coût de la $i^{ème}$ contrainte » (« shadow price » en anglais).

Les valeurs $\underline{x}^*$ et $\underline{\lambda}^*$ qui satisfont les relations suivantes, dites conditions du premier ordre constituant un système de N+M équations à N+M inconnues, sont des extrema (maxima ou minima) de L:

$$\frac{\partial L(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*)}{\partial \underline{x}} = \underline{0} \text{ (N équations)} \quad ; \qquad g_i(\underline{x}^*) = c_i \text{ pour } i = 1,\dots,M \text{ (M équations)}$$

- Si $L(\underline{x},\underline{\lambda})$ est concave, l'extremum $\underline{x}^*$ qui satisfait les conditions du premier ordre est un maximum de L et résout le programme *Max*. Si $L(\underline{x},\underline{\lambda})$ est convexe, $\underline{x}^*$ minimise L et résout le programme *Min*. Par ailleurs, $L(\underline{x},\underline{\lambda})$ est concave (convexe) si $f(\underline{x})$ est concave (convexe) ou linéaire et les $g_i(\underline{x})$ sont convexes (concaves) ou linéaires[14].
- La technique habituelle de détermination de l'optimum consiste à exprimer les N valeurs x_i^* en fonction de $\underline{\lambda}^*$ à l'aide des N équations $\frac{\partial L(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*)}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$, puis de substituer le $\underline{x}^*(\underline{\lambda}^*)$ ainsi obtenu dans les M contraintes $g_i(\underline{x}^*) = c_i$ afin de déterminer les M multiplicateurs λ_i^*.

b) Optimisation sous des contraintes d'inégalité

Le programme s'écrit ici :

$$\underset{\underline{x}}{Max}\, f(\underline{x}) \text{ s.c.: } g_1(\underline{x}) \le c_1. \; ; \dots ; \; g_m(\underline{x}) \le c_m \; ; \; g_{m+1}(\underline{x}) = c_{m+1} \; ; \dots ; \; g_M(\underline{x}) = c_M$$

Ou $\underset{\underline{x}}{Min}\, f(\underline{x})$ s.c.: $g_1(\underline{x}) \le c_1.$; … ; $g_m(\underline{x}) \le c_m$; $g_{m+1}(\underline{x}) = c_{m+1}$;… ; $g_M(\underline{x}) = c_M$

Les m premières contraintes sont donc des inégalités et les M-m dernières sont des égalités. Il est souvent clair que certaines des m premières contraintes sont « saturées » à l'optimum ($g_i(\underline{x}^*) = c_i$) et l'on peut alors remplacer la contrainte d'inégalité par une égalité. Le cas échéant, toutes les contraintes sont saturées et le programme peut être traité comme en a) ; telle est la situation des programmes d'optimisation traités dans la section III de ce chapitre. Dans l'hypothèse où la saturation des contraintes n'est pas évidente *a priori*, la solution

---

[14] Dès lors, soit f, soit un des g_i, au moins, doit avoir, strictement, la « bonne » convexité. Si cette convexité prévaut dans un domaine ***D*** contenant tous les $\underline{x}$ respectant les M contraintes, le $\underline{x}^*$ qui satisfait les conditions du premier ordre est unique et est un optimum global ; en revanche, si la condition de convexité n'est satisfaite que dans un voisinage de $\underline{x}^*$, ce dernier peut n'être qu'un optimum local (c'est cette dernière propriété que les conditions du $2^{ème}$ ordre, non présentées dans cet exposé succinct, permettent de vérifier).

s'obtient selon la méthode suivante : le Lagrangien est défini comme dans a) ; les M+N conditions du premier ordre (conditions de Kuhn et Tucker) s'écrivent :

$\frac{\partial L(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$; $\lambda_i^*(g_i(\underline{x}^*) - c_i) = 0$ (avec : soit $\lambda_i^* > 0$ et $g_i(\underline{x}^*) = c_i$, soit $\lambda_i^* = 0$ et $g_i(\underline{x}^*) < c_i$), pour $i = 1,\ldots,m$; en outre $g_j(\underline{x}^*) = c_j$ pour $j = m+1,\ldots,M$.

La condition $\lambda_i^*(g_i(\underline{x}^*) - c_i) = 0$, relative à la i$^{\text{ème}}$ contrainte d'inégalité, se comprend aisément grâce à l'interprétation du multiplicateur λ_i^* comme coût de cette i$^{\text{ème}}$ contrainte : soit celle-ci est saturée, donc $g_i(\underline{x}^*) - c_i = 0$ et $\lambda_i^* > 0$ (la contrainte est « gênante » et son relâchement permettrait d'obtenir un « meilleur optimum », donc une valeur supérieure de $f(\underline{x}^*)$[15]) ; soit la contrainte n'est pas saturée ($g_i(\underline{x}^*) < c_i$) et son relâchement ne modifierait pas l'optimum $\underline{x}^*$, donc ne permettrait pas d'accroître la valeur de f.

[15] Pour un maximum ; une petite variation Δc_i conduirait à $\Delta f(\underline{x}^*) = \lambda_i^* \Delta c_i$.