Le MEDAF

Modèle d'évaluation des actifs financiers

Comment le risque affecte-t-il la rentabilité espérée d'un investissement ?

Le MEDAF (CAPM = Capital Asset Pricing Model) donne une réponse cohérente.

- Tous les risques n'affectent pas les prix des actifs.
- Seul le risque non diversifiable est rémunéré à l'équilibre.

Le MEDAF donne une évaluation de la rentabilité espérée d'un actif, μ_i, en fonction du « risque ».

Cette rentabilité espérée peut être utilisée comme taux d'actualisation dans la valorisation de l'actif.

1- La diversification (théorie des choix de portefeuille de Markowitz)

Intuitivement, les investisseurs devraient exiger des rendements élevés pour détenir des actifs à risque élevé.
Mais la rémunération du risque d'un actif dépend de la manière dont il est détenu...

Un portefeuille est constitué de plusieurs (N) actifs dont les taux de rentabilité sont considérés comme des variables aléatoires R_i, dont les propriétés statistiques sont connues (observations des séries passées).

Valeur d'un actif en t : $V_{i,t}$ $\Rightarrow$ Rentabilité arithmétique de l'actif : $R_i = \dfrac{V_{i,1} - V_{i,0}}{V_{i,0}}$

- Espérance : $E(R_i) = \mu_i$, $\rightarrow$ **$\mu_i \approx$ rentabilité moyenne**
- Variance : $V(R_i) = \sigma_i^2$, $\rightarrow$ **$\sigma_i \approx$ « risque »**
- Covariance : $Cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij}. = \sigma_{ji}.$
- Coefficient de corrélation : $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/(\sigma_i \sigma_j)$

Valeur d'un portefeuille contenant n_i actifs i, $i = 1, \dots N$: $V_{P,t} = \sum_{i=1}^{N} n_i V_{i,t}$

(valeur du portefeuille = somme des valeurs des actifs qui le composent)

Part de l'actif i dans le portefeuille : $x_i = \frac{n_i V_{i,0}}{V_{P,0}}$

Rentabilité arithmétique du portefeuille : $R_P = \frac{V_{P,1} - V_{P,0}}{V_{P,0}} = \dots = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$

La rentabilité arithmétique du portefeuille est égale à la moyenne des rentabilités arithmétiques des actifs qui le composent, pondérée par leur poids.

NB : la rentabilité *logarithmique* du portefeuille *n'est pas égale* à la moyenne des moyenne des rentabilités *logarithmiques* des actifs qui le composent...

Représentation « matricielle » du portefeuille et de ses caractéristiques

Portefeuille → un vecteur des « parts » d'actifs : $X' = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N]$
Rentabilités des actifs : $R' = [R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_N]$

Matrice des variances-covariances de N actifs : $\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & \sigma_{1j} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{i1} & \ldots & \sigma_i^2 & \ldots & \sigma_{iN} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{N1} & \ldots & \sigma_{Nj} & \ldots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$

Rentabilité du portefeuille : $R_P = X' R = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$

Espérance de la rentabilité : $\mu_P = E(R_P) = X' E(R) = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$

Variance de la rentabilité : $V(R_P) = X' \Omega X = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$

<u>Exemple :</u> portefeuille P constitué de deux titres, en proportions x et $(1 - x)$

Espérance de la rentabilité : $\mu_P = x\, \mu_1 + (1 - x)\, \mu_2$

Variance de la rentabilité : $\sigma_P^2 = x^2\, \sigma_1^2 + (1 - x)^2\, \sigma_2^2 + 2\, x(1 - x)\sigma_{12}$

$$\sigma_P^2 = x^2\, \sigma_1^2 + (1 - x)^2\, \sigma_2^2 + 2\, x(1 - x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

écriture matricielle ?

Dans la théorie de Markowitz, les caractéristiques essentielles d'un actif ou d'un portefeuille sont sa « rentabilité » (moyenne) et son « risque ».

La constitution d'un portefeuille permet de diminuer le « risque » (mesuré par la variance de la rentabilité).

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ alors :

$\sigma_P^2 = [x^2 + (1-x)^2 + 2\,x(1-x)\rho_{12}]\sigma^2 = [1 - 2(1-\rho_{12})x(1-x)]\sigma^2$

pour $\rho_{12} = 1$, $\sigma_P^2 = \sigma^2$ quelque soit la composition du portefeuille (x).

pour $\rho_{12} < 1$, $\sigma_P^2 < \sigma^2$ quelque soit la composition du portefeuille (x).

Markowitz (1952) montre que les bénéfices de la diversification dépend des corrélations.

- Corrélation = 1 → les actifs sont des substituts (leurs rentabilités varient dans le même sens, dans des proportions fixes : $R_i = b.R_j + a$ avec $b > 0$)
- Corrélation = –1 → les actifs s'assurent mutuellement (leurs rentabilités varient en sens inverse, dans des proportions fixes : $R_i = b.R_j + a$ avec $b < 0$)
- Corrélation = 0 → pas de lien entre les rentabilités.

Apports de Markowitz :

- l'intérêt de la diversification ne repose pas sur l'absence de corrélation entre les rentabilités, mais sur leur *imparfaite corrélation*.
  - « répartir ses œufs dans des paniers imparfaitement corrélés plutôt que les mettre dans des paniers parfaitement corrélés positivement »

- La réduction des risques permise par la diversification est limitée par le degré de corrélation entre les actifs.

La diversification du portefeuille permet de diminuer le « risque », sans nécessairement diminuer la rentabilité moyenne.

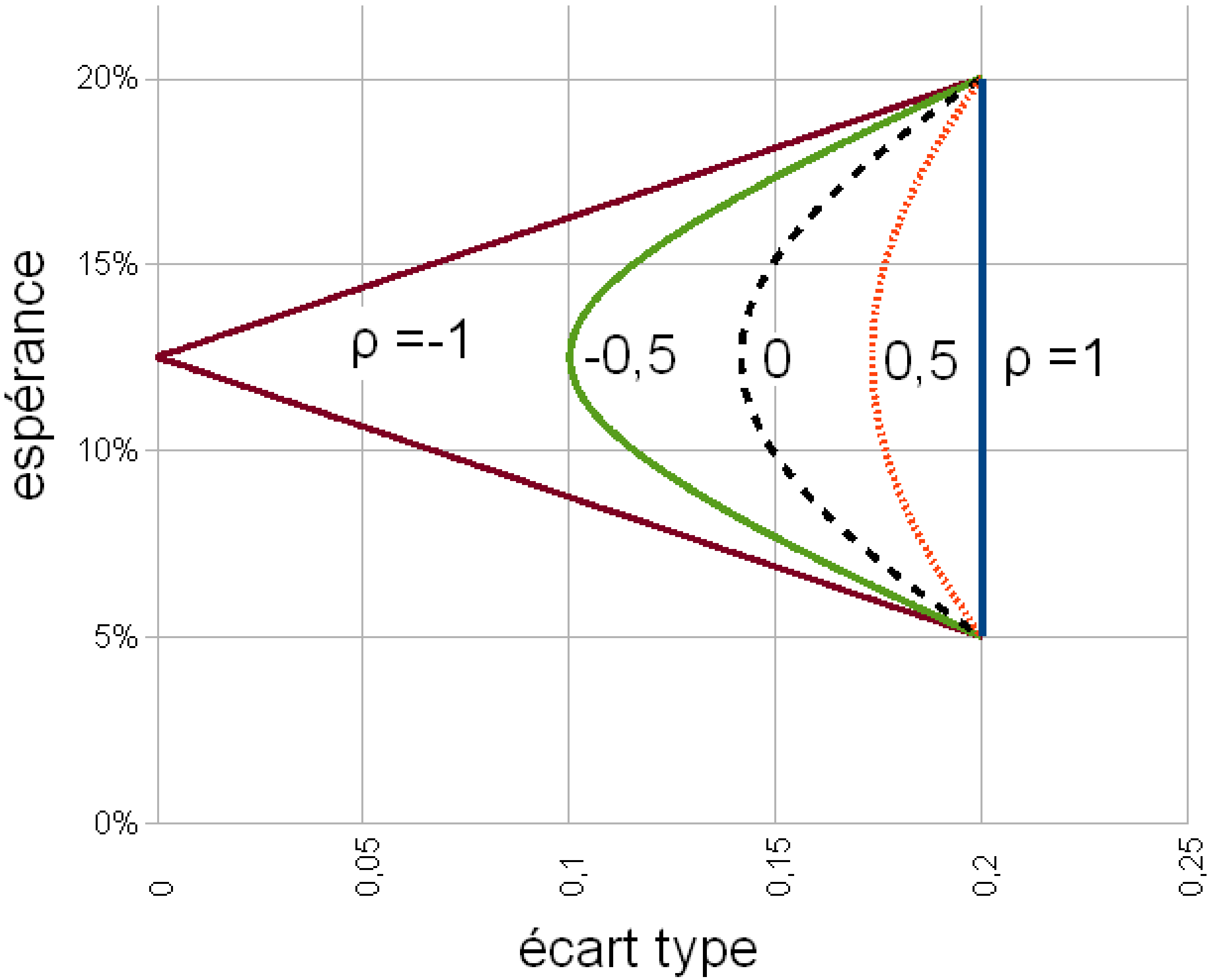
Exemple n°1 : Rentabilité moyenne en fonction de l'écart-type de rentabilité d'un portefeuille à deux actifs pour diverses valeurs du coefficient de corrélation.

Avec :

$\mu_1 = 5\%$ $\mu_2 = 20\%$

$\sigma_1 = 20\%$ $\sigma_2 = 20\%$

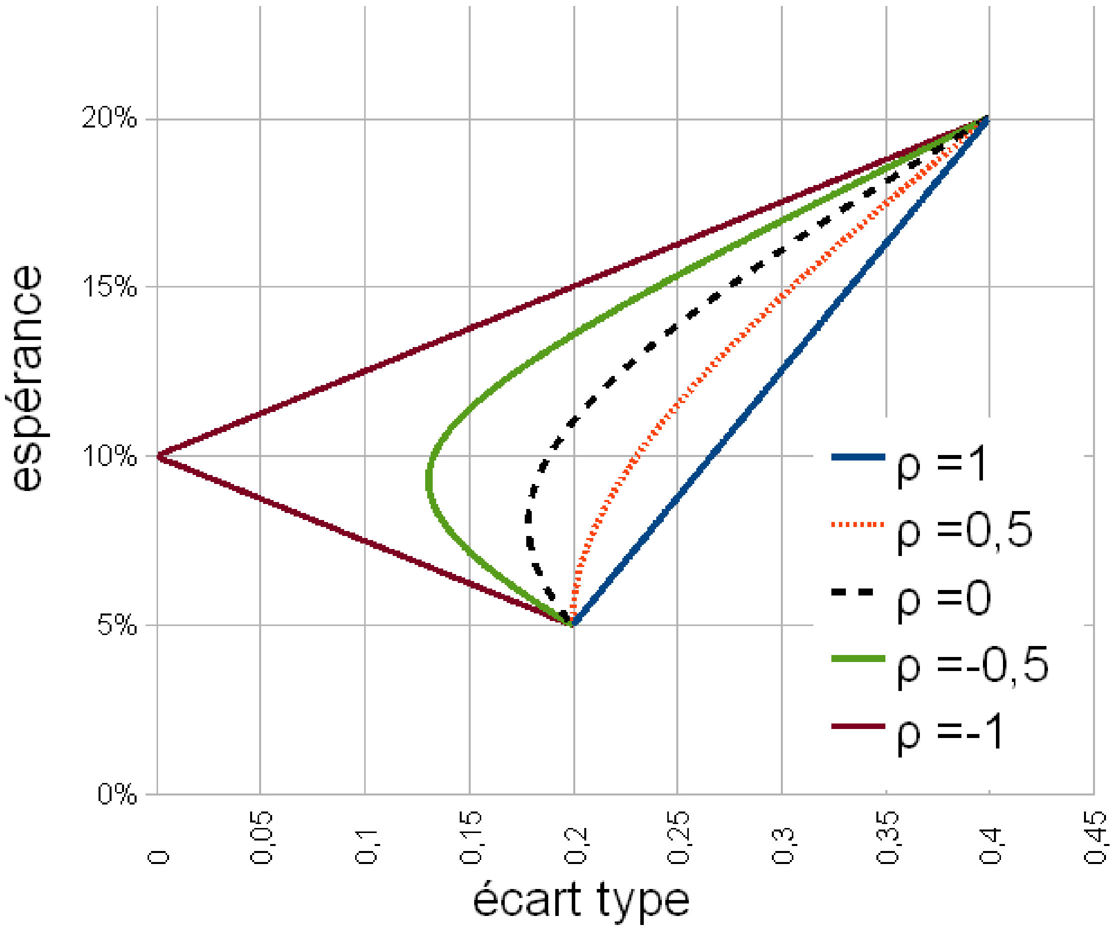
(même « risque »)



Avec :

$\mu_1 = 5\%$ $\mu_2 = 20\%$

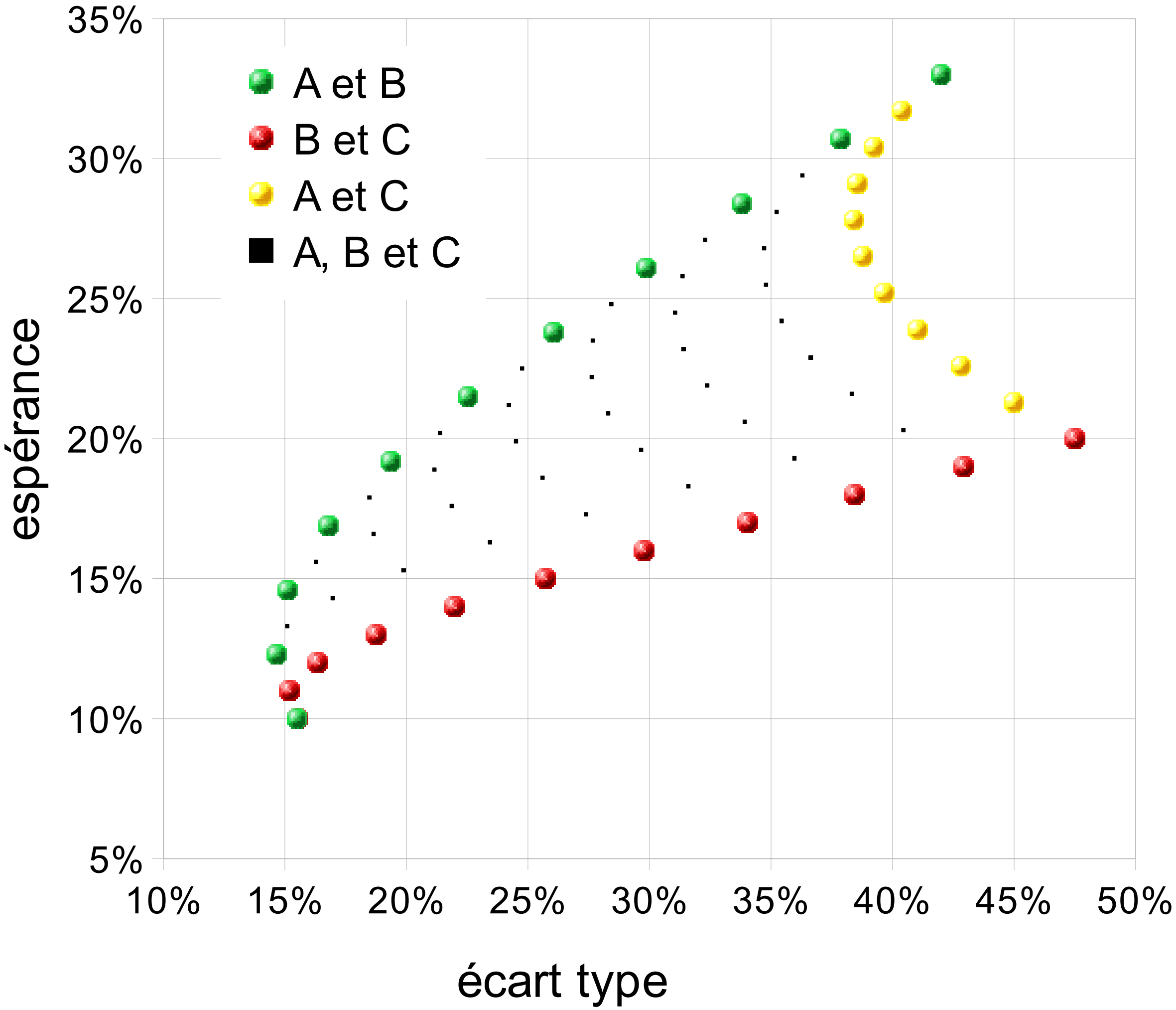
$\sigma_1 = 20\%$ $\sigma_2 = 40\%$



Exemple n°2 : Rentabilité moyenne en fonction de l'écart-type de rentabilité d'un portefeuille à trois actifs, A, B et C.

	Coefficient de corrélation		
	A	B	C
A	1	0,02	0,5
B		1	0,1
C			1

	μ_i	σ_i
A	33 %	42,0 %
B	10 %	15,5 %
C	20 %	47,5 %



2- La frontière efficiente

2.1- En l'absence d'actif sans risque (Markowitz)

Si on combine tous les titres « risqués » disponibles de toutes les manières possibles, on obtient *l'ensemble des portefeuilles possibles*, caractérisés par un taux de rentabilité de moyenne μ et d'écart-type σ.

Parmi tous ces portefeuilles figure le « portefeuille de marché » qui comprend tous les titres risqués pondérés par leur capitalisation. Le portefeuille de marché a une rentabilité R_M, de moyenne μ_M et d'écart-type σ_M.

Un **portefeuille efficient** est un portefeuille
dont la rentabilité moyenne est maximale pour un niveau de risque donné, ou dont le risque est minimal pour une rentabilité donnée.

Les portefeuilles efficients sont sur la « frontière » de l'ensemble des portefeuilles dans le plan (σ, μ).

Principe de détermination des portefeuilles efficients :

$$\underset{X}{Max} \quad E(R_P) - \lambda V(R_P)$$

s.c. $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ soit $X'.1_N = 1$

λ est un paramètre décrivant la frontière.

$\lambda = 0$: espérance de rentabilité maximale

$\lambda \rightarrow \infty$: variance de rentabilité minimale

λ peut s'interpréter comme l'aversion au risque d'un décideur « quadratique »...

On peut montrer algébriquement que :

$$\sigma_P^2 = \sigma_V^2 + \left(\frac{\mu_P - \mu_V}{a}\right)^2$$

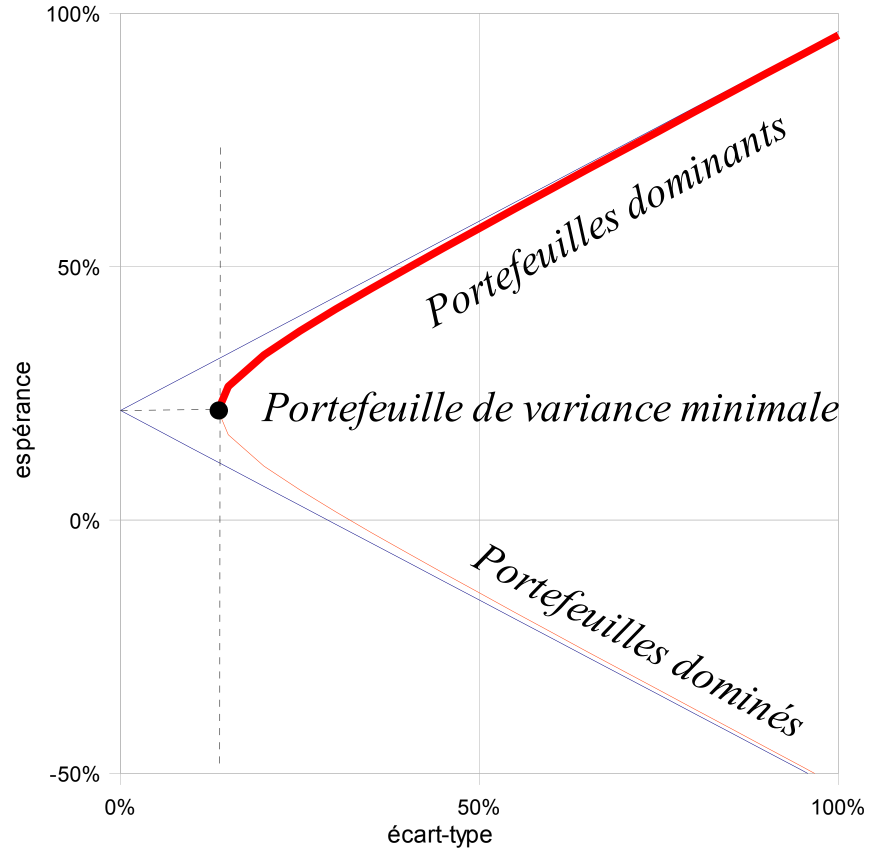
La frontière de l'ensemble des portefeuilles est une branche d'hyperbole d'équation : $\mu = \mu_V \pm a\sqrt{\sigma^2 - \sigma_V^2}$ dans le plan (σ, μ).

où a est une constante (qui correspond à la pente de la branche asymptotique, et dont la valeur dépend des caractéristiques des rentabilités des titres existant, leurs moyennes, variances, covariances)

et σ_V et μ_V sont les caractéristiques du portefeuille de variance minimale.

Exemple :

$$\mu = 21,62\,\% \pm 0,7479\sqrt{\sigma^2 - (13,59\,\%)^2}$$



La frontière efficiente « régulière » est la branche supérieure de l'hyperbole (portefeuilles dominants).

Les rentabilités espérées se combinent linéairement, tandis que les « risques » se combinent non linéairement, à cause des covariances.

Les portefeuilles d'actifs risqués « efficients » vérifient plusieurs **propriétés** :

1. Par construction, la rentabilité moyenne d'un portefeuille efficient est une fonction croissante du risque (si on modifie un portefeuille efficient de manière à augmenter la rentabilité moyenne, alors on est contraint d'augmenter le risque).

2. Toute combinaison linéaire de portefeuilles efficients est un portefeuille efficient (en particulier, le portefeuille de marché est efficient).

3. Toute la frontière « régulière » peut être générée par la combinaison linéaire de deux portefeuilles efficients quelconques, en combinant éventuellement des positions longues et courtes (« théorème de séparation à deux fonds » de F. Black 1972, qui généralise celui de Tobin 1958).

2.2- En présence d'actif sans risque (Tobin 1958)

L'**actif sans risque** paie un taux de rentabilité réelle fixe, sans risque de défaut (type obligation d'État indexée).

Dans un portefeuille comprenant

- un titre (ou portefeuille) risqué, (σ_R, μ_R), en proportion x,
- et un actif sans risque, $(0, r_f)$, en proportion $(1 - x)$,

Rentabilité espérée et risque se combinent linéairement :

$R_P = x\, R_R + (1 - x) r_f \Rightarrow \mu_P = x\, \mu_R + (1 - x) r_f$ et $\sigma_P = x\, \sigma_R$

D'où : $\mu_P = r_f + \dfrac{\mu_R - r_f}{\sigma_R} \sigma_P$

$\frac{\mu_R - r_f}{\sigma_R}$ s'appelle le « ratio de Sharpe » du titre risqué.

$\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ s'appelle le « ratio de Sharpe » du portefeuille.

On a donc : $\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{\mu_R - r_f}{\sigma_R}$

Le portefeuille a le même ratio de Sharpe que l'actif risqué qu'il contient.

$\mu_P - r_f \rightarrow$ mesure la rentabilité excédentaire moyenne (rémunération du risque)

$\sigma_P \rightarrow$ mesure la « quantité » de risque

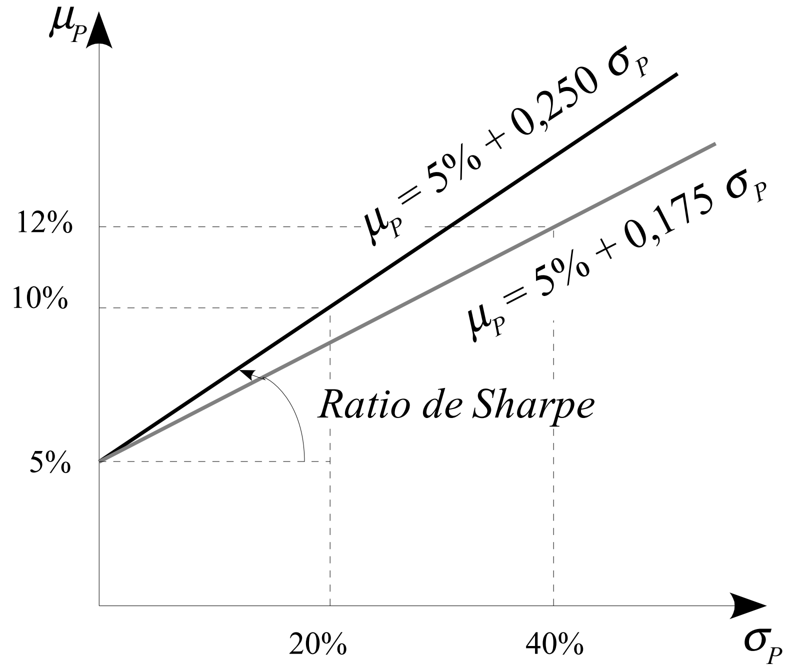
$\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} \rightarrow$ s'interprète comme la rémunération *unitaire* du risque

Exemple :

actif sans risque : $r_f = 5\%$

actifs risqués, de rentabilités :

- R_1 caractérisé par $(\sigma_1, \mu_1) = (40\%, 12\%)$
- R_2 caractérisé par $(\sigma_2, \mu_2) = (20\%, 10\%)$



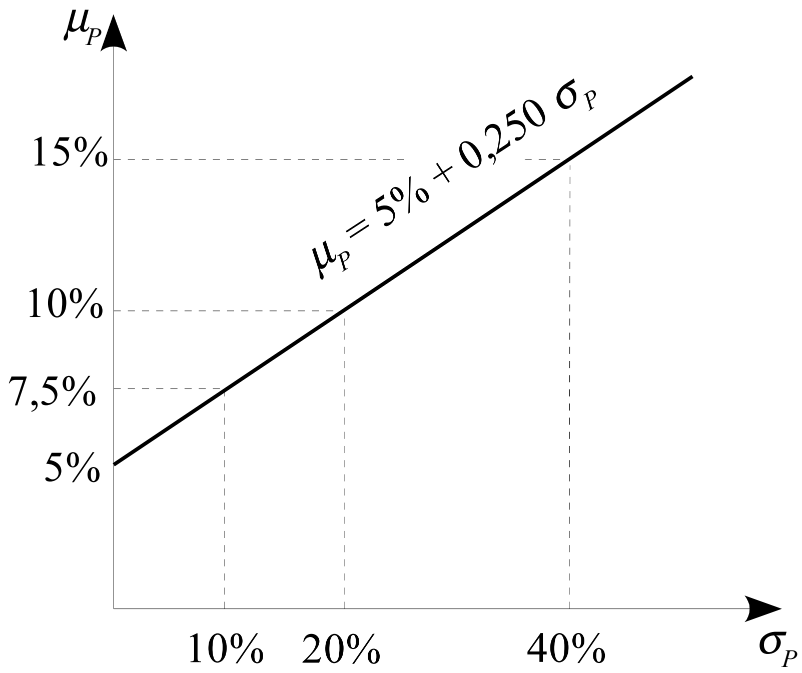
Tous les portefeuilles combinant l'actif sans risque et R_1 sont dominés par ceux qui contiennent R_2 au lieu de R_1.

→ choisir le portefeuille ayant le ratio de Sharpe le plus élevé.

La possibilité de placer dans un actif sans risque et d'emprunter au taux sans risque élargit l'ensemble des portefeuilles possibles.

En combinant l'actif sans risque
et R_2 caractérisé par $(\sigma_2, \mu_2) = (20\%, 10\%)$...

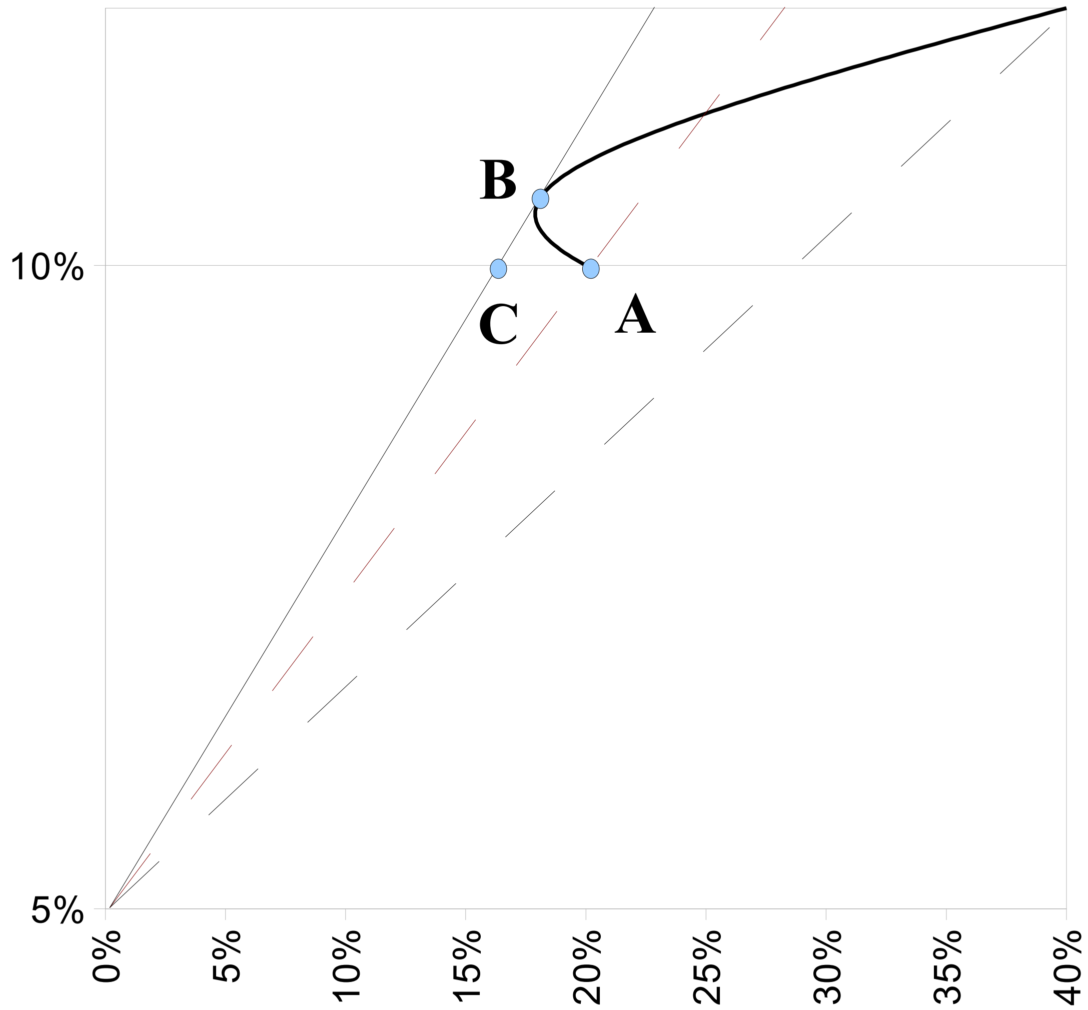
… Comment obtenir $\mu_P = 15\%$?
… Comment obtenir $\sigma_P = 10\%$?



Quels actifs risqués choisir ?

Utiliser les bienfaits de la diversification.
Supposons que les rentabilités de R_1 caractérisée par (σ_1, μ_1) = (40%, 12%) et R_2 caractérisée par (σ_2, μ_2) = (20%, 10%) ne sont pas corrélées.

Expliquer le passage de A à B, puis de B à C.
Comparer A et B...



La frontière efficiente « singulière » est la demi-droite qui relie le titre sans risque au portefeuille d'actifs risqués ayant le ratio de Sharpe le plus élevé (« portefeuille tangent »).

<u>Exemple :</u>

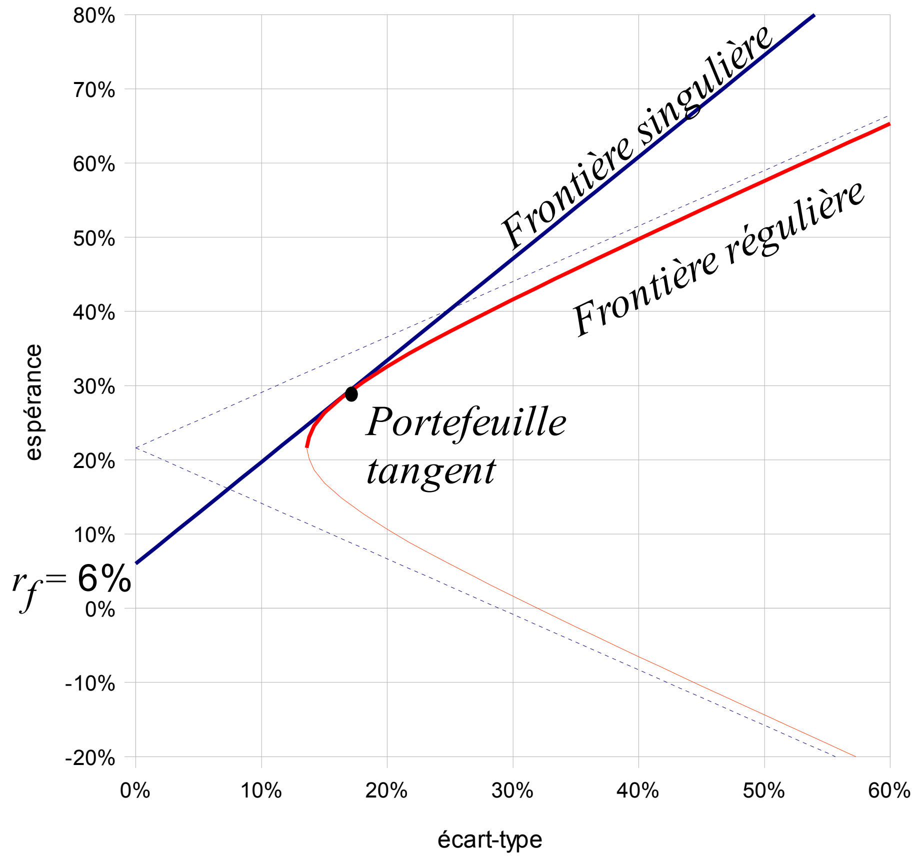
Frontière régulière :

$$\mu = 21{,}62\,\% \pm 0{,}7479\sqrt{\sigma^2 - (13{,}59\,\%)^2}$$

	σ	μ
centre:	0	21,62%
portef var min	13,59%	21,62%
portef tangent	16,22%	28,23%

pente asymptote : 0,7479

pente frontière singulière : 1,3708



La frontière singulière indique un **principe de séparation des fonds** (« théorème de séparation à deux fonds » de Tobin 1958) :

Des investisseurs ayant les mêmes anticipations sur les rentabilités et leurs corrélations, investissent dans le même portefeuille (ou fonds) d'actifs risqués (celui qui a le ratio de Sharpe le plus élevé).

Sa composition est indépendante de la tolérance ou de l'aversion au risque des investisseurs.
C'est l'allocation entre ce fonds et l'actif sans risque qui diffère selon la tolérance ou l'aversion au risque.

Détermination du portefeuille tangent :

Maximiser le ratio de Sharpe en choisissant σ, sous la contrainte d'appartenance à la frontière régulière.

$$Max_{\sigma} \frac{\mu - r_f}{\sigma} \quad \text{s.c.} \quad \mu = \mu_V + a\sqrt{\sigma^2 - \sigma_V^2}$$

On obtient : $\mu_T = \mu_V + \dfrac{a^2 \sigma_V^2}{\mu_V - r_f}$ et $\sigma_T^2 = \sigma_V^2 \left(1 + \dfrac{a^2 \sigma_V^2}{(\mu_v - r_f)^2} \right)$

L'équation de la frontière singulière est alors : $\mu = r_f + \dfrac{\mu_T - r_f}{\sigma_T} \sigma$

Tous les portefeuilles efficients combinent l'actif sans risque et le portefeuille tangent, et ont le même ratio de Sharpe que le portefeuille tangent.

3- L'équilibre du marché (le MEDAF)

La théorie du portefeuille conseille de choisir un portefeuille risqué efficient ou un partage entre actif sans risque et portefeuille d'actifs risqués selon le degré d'aversion au risque.

Le MEDAF (modèle d'évaluation des actifs financiers) propose une détermination des prix d'équilibre des actifs.

3.1- Hypothèses (Sharpe, Treynor, Lintner, Mossin)

1. Des investisseurs riscophobes évaluent les portefeuilles en termes d'espérance et de variance des rentabilités sur une période (il existe des extensions sur plusieurs périodes, des extensions avec des fonctions d'utilité espérée)

2. Les marchés de titres sont parfaits (actifs parfaitement divisibles, pas de coûts de transactions, pas de restrictions de ventes à découvert, pas de taxes, information disponible sans coût, possibilité de prêt et d'emprunt au taux sans risque)

3. Les investisseurs ont accès aux mêmes opportunités d'investissement.

4. Les anticipations de rendement (espérances, variances, covariances) sont identiques.

Sous ces hypothèses,

- tous les investisseurs déterminent
  - la même frontière efficiente régulière,
  - le même portefeuille tangent (ayant le ratio de Sharpe le plus élevé) ;

- ils détiennent tous des actifs risqués dans les mêmes proportions (celles du portefeuille tangent, le « fonds d'actifs risqués »).

Alors :
A l'équilibre du marché, tous les titres offerts sont détenus :

→ **A l'équilibre, le portefeuille « tangent » est le portefeuille de marché.**

3.2- Portefeuille de marché et « droite de marché »

A l'équilibre :

Le portefeuille « tangent » est le portefeuille de marché.
La frontière « singulière » est appelée « droite de marché » (*Capital Market Line*).

Pour tous les portefeuilles efficients, on a donc : $\boxed{\mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \sigma_P}$

Tous les portefeuilles ont le même ratio de Sharpe, celui du portefeuille de marché.

La rentabilité (à l'équilibre) de tout portefeuille efficient est la somme :
- du taux sans risque
- d'une « prime de risque » qui s'écrit comme « prix du risque *fois* quantité de risque » : le ratio de Sharpe s'interprète comme « prix du risque », et l'écart-type de la rentabilité comme quantité de risque.

3.3- Évaluation des actifs et « droite caractéristique » d'un actif

Dans tout portefeuille efficient, on peut montrer que *la prime de risque d'un actif particulier est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille* :

$$\mu_i - r_f = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_P)}{\sigma_P^2}(\mu_P - r_f)$$

Le facteur de proportionnalité mesure *la contribution marginale du titre i au risque du portefeuille*.
On montre en effet, en calculant l'accroissement en pourcentage de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille dû à un accroissement d'un point de pourcentage de la part du titre en portefeuille, que :

$$\frac{d\sigma_P / \sigma_P}{d x_i} = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_P)}{\sigma_P^2}$$

Il faut bien comprendre que **la « prime de risque » d'un actif ne dépend pas du « risque total » intrinsèque mais du risque additionnel que l'actif ajoute au risque du portefeuille où il est intégré**.

Soient deux actions ayant le même risque total.
Si leur prime de risque dépendait seulement de leur risque total intrinsèque, alors elles seraient égales.
De même pour tout portefeuille combinant ses deux actions.

Or, si les rentabilités sont imparfaitement corrélées, le risque du portefeuille est inférieur au risque de l'une des deux actions isolée. Dès lors, la prime de risque du portefeuille, si elle ne dépendait que du risque total intrinsèque, devrait être inférieure à celle d'une action isolée.

➔ **contradiction**

A l'équilibre du marché,
tout titre fait partie du portefeuille de marché, qui est efficient.

On a donc : $\mu_i - r_f = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}(\mu_M - r_f)$

Si cette relation n'est pas vérifiée pour un titre *i*, les investisseurs peuvent « battre le marché » en ajoutant le titre à leur portefeuille. Alors, la demande augmente, le cours monte et la rentabilité baisse.

A l'équilibre, la rentabilité doit donc vérifier cette relation.

$$\mu_i - r_f = \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M^2} \mathrm{Cov}(R_i, R_M)$$

Interprétation :

Prime de risque	=	Prix du risque (mesuré par la variance)	x	quantité de risque (mesuré par la covariance)

Autre expression, en utilisant $\rho_{iM} = \text{Cov}(R_i, R_M)/(\sigma_i\sigma_M)$:

$$\frac{(\mu_i - r_f)}{\sigma_i} = \rho_{iM} \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M}$$

soit :

Ratio de Sharpe du titre	=	coefficient de corrélation des rendements du titre et du marché	x	ratio du Sharpe du portefeuille de marché

A l'équilibre, tous les titres ayant le même coefficient de corrélation avec le marché ont le même ratio de Sharpe.

Interprétation :

On appelle « bêta » du titre (β_i) le paramètre $\dfrac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$.

Il représente :

- la sensibilité du rendement du titre au rendement du marché, c'est-à-dire la variation du rendement expliquée par celle du marché.
- ou encore la part de « risque systématique » ou « risque non diversifiable » contenue dans le risque total du titre.

A l'équilibre du marché, on a donc : $\mu_i - r_f = \beta_i (\mu_M - r_f)$

Le modèle de marché de Sharpe

Modèle statistique sans fondement théorique, supposant que les rentabilités sont « normalement » distribuées et que la régression linéaire par les MCO de R_i sur R_M, donne la relation :

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it} \qquad \text{(« droite caractéristique du titre »).}$$

- α_i et β_i sont les coefficients de la régression,
- β_i est précisément égal à $\dfrac{\operatorname{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$
- ε_{it} est le résidu, d'espérance nulle, non corrélé à R_{mt}.

D'où l'idée de considérer la rentabilité du titre comme décomposable en deux parts :

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$$

En prenant l'espérance mathématique, on obtient : $\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M$

3.4- Risque systématique et risque spécifique

Le rendement du titre varie pour deux raisons principales :

- l'influence du marché → β_i mesure la sensibilité du rendement du titre au rendement du marché,
    - si $\beta_i < 1$, alors le rendement du titre varie moins que celui du marché → on dit que le titre est « défensif » (actions de « père de famille »)
    - si $\beta_i > 1$, alors le rendement du titre varie plus que celui du marché → on dit que le titre est « offensif » (actions de « croissance »)

- des causes spécifiques → ε_i

Le « risque total » du titre (mesuré par la variance de la rentabilité) vaut :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2$$

soit :

Risque total	=	Risque systématique (non diversifiable)	+	Risque spécifique (non systématique, diversifiable)

Le risque *systématique* est d'origine « macroéconomique » : croissance économique, crises, mouvements de taux d'intérêt, incertitudes géopolitiques...

Le risque *spécifique* est d'origine « microéconomique » : grèves dans l'entreprise, contrats décrochés, changements de goûts des consommateurs, poursuites judiciaires...

3.5- Élimination du risque spécifique par diversification

La rentabilité d'un portefeuille à N titres est la moyenne des rentabilités des titres :

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$$

En décomposant la rentabilité de chaque titre en $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$ on écrit la rentabilité du portefeuille comme :

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i R_M + \sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_i = \alpha_P + \beta_P R_M + \varepsilon_P$$

Démonstration :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathrm{Cov} \frac{(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$$

or, la covariance étant une fonction linéaire :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mathrm{Cov}(R_i, R_M) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Cov}(x_i R_i, R_M) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i, R_M\right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathrm{Cov}(R_i, R_M) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i, R_M\right) = \mathrm{Cov}(R_P, R_M) = \beta_P \sigma_M^2$$

Ainsi, **le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent**.

D'où la décomposition du risque total du portefeuille en risque « systématique » et en risque « spécifique » :

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon P}^2$$

En augmentant la part des titres dont le bêta est supérieur à 1, l'investisseur augmente la composante « systématique » du risque de portefeuille (sensibilité au risque de marché).

En augmentant la part des titres dont le bêta est inférieur à 1, l'investisseur diminue la composante « systématique » du risque de portefeuille (sensibilité au risque de marché).

La composante spécifique du risque diminue en augmentant la variété des titres en portefeuille.

En effet, le risque spécifique est mesuré par $\sigma^2_{\varepsilon P}$ qui vaut :

$$\sigma^2_{\varepsilon p} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma^2_{\varepsilon i} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} x_i^2 \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

Dans un portefeuille équipondéré, $x_i = 1/N$ et

$$\sigma^2_{\varepsilon p} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma^2_{\varepsilon i} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} x_i^2 \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

On note $\bar{v}$ la variance moyenne, et $\bar{c}$ la covariance moyenne.

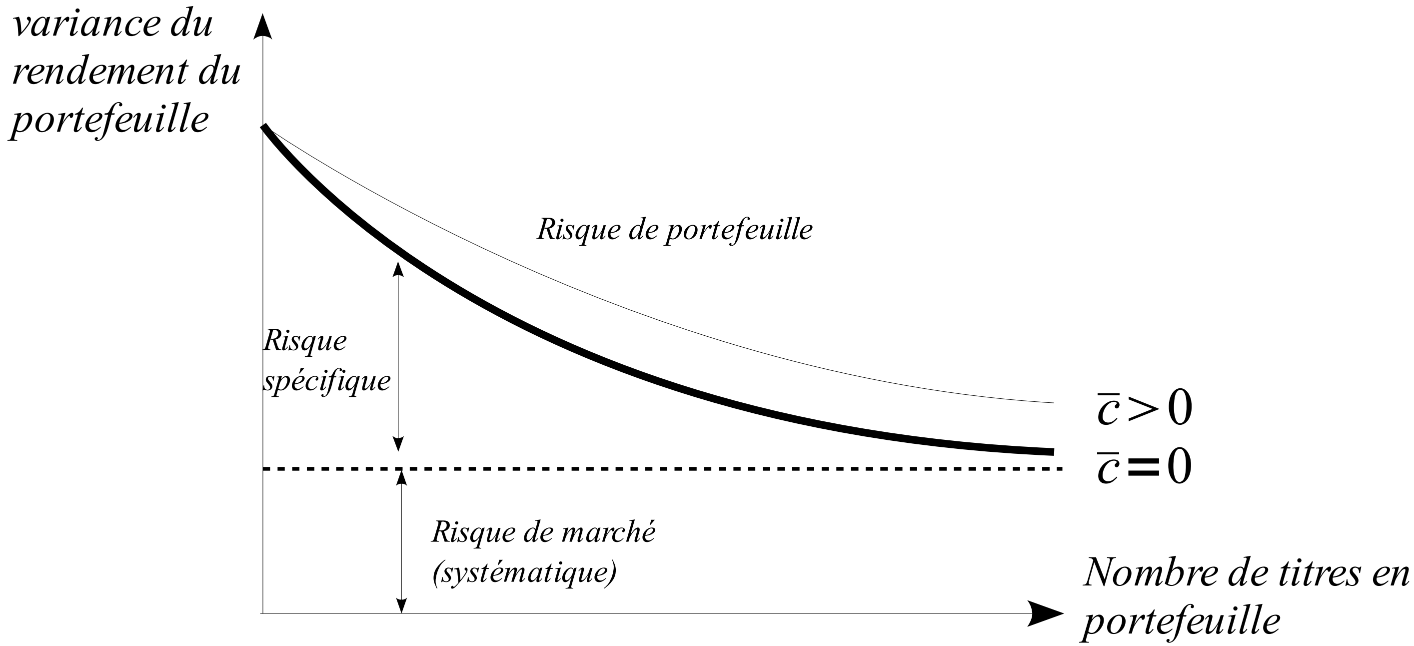
$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2_{\varepsilon i} \quad \text{et} \quad \bar{c} = \frac{1}{N^2 - N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

Alors, la variance du rendement du portefeuille s'écrit :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N}\bar{v} + \frac{N^2 - N}{N^2}\bar{c} = \frac{1}{N}\bar{v} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\bar{c}$$

En augmentant le nombre de titres en portefeuille, le « risque » du portefeuille diminue. La covariance moyenne détermine le « socle » de risque spécifique qui subsiste après diversification.

Diagramme de Wagner et Lau :



3.6- Implications du MEDAF

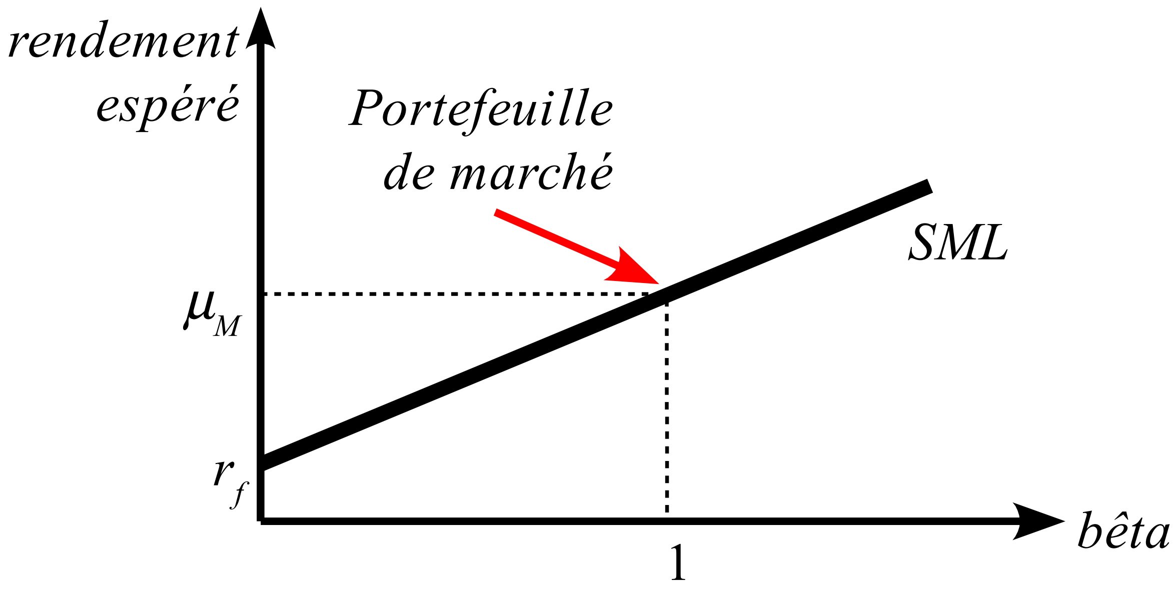
1°- La rentabilité espérée d'un titre ne dépend pas de son risque spécifique.

$$\mu_i = r_f + \beta_i (\mu_M - r_f)$$

→ La rentabilité (donc la prime de risque) d'un titre dépend de la prime de risque du marché et du bêta du titre.

2°- Le bêta indique la part du risque non diversifiable.

A l'équilibre, tous les portefeuilles et tous les actifs sont sur la « droite du MEDAF » (SML = *Security Market Line*)



Le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent.

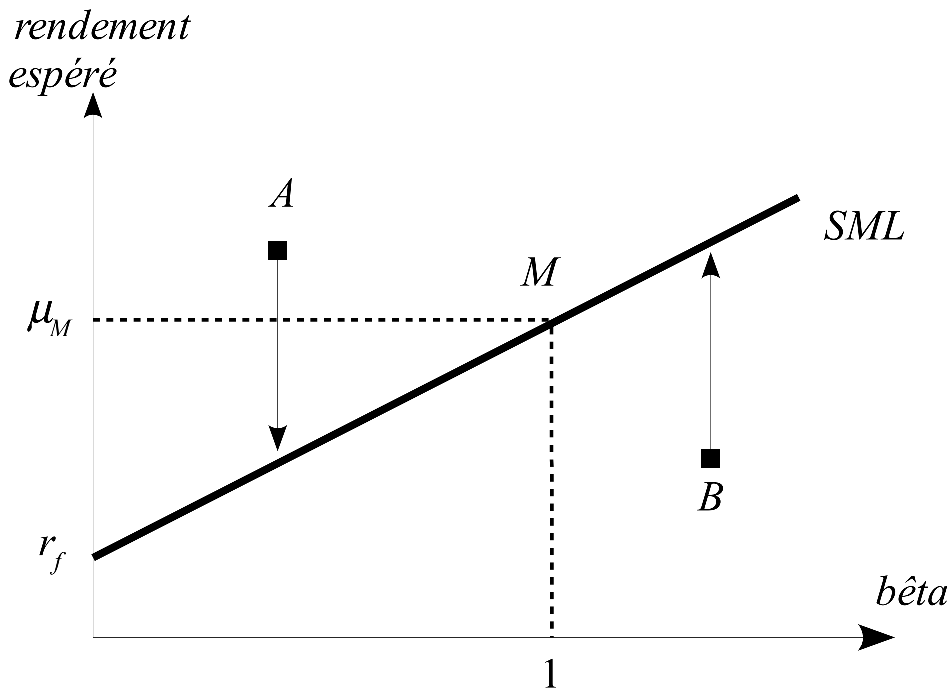
Le bêta du portefeuille de marché est égal à 1.

Un portefeuille efficient est composé de titres sans risques et du portefeuille de marché (théorème de séparation en deux fonds).

→ **le bêta du portefeuille efficient mesure la fraction investie dans le portefeuille de marché** !

Seul le risque non diversifiable (la fraction du portefeuille investi dans le portefeuille de marché) « mérite » une rémunération (une rentabilité supérieure au taux sans risque).

- Un titre A situé au-dessus de la SML est « sous-évalué » : sa rentabilité espérée est supérieure à celle d'un portefeuille efficient de même bêta, la demande pour ce titre devrait augmenter, ainsi que son prix (de sorte que sa rentabilité espérée diminue).
- Un titre B situé au-dessous de la SML est, au contraire, « sur-évalué » (son prix courant est supérieur au prix d'équilibre, sa rentabilité actuelle est inférieure à sa rentabilité d'équilibre).



3°- La valeur d'un titre ne dépend pas du taux de croissance anticipé des cash-flows futurs.

Le modèle de Gordon-Shapiro de détermination du coût du capital est remis en cause et dépassé.

$$\text{Coût du capital financé par action} = \text{rendement en dividende} + \text{taux de croissance anticipé du dividende}$$

Le coût du capital est donné par la rentabilité anticipée (l'espérance mathématique de la rentabilité), qui dépend du bêta, du taux sans risque et de la prime de risque du marché.

$$\text{Coût du capital} = \text{taux sans risque} + \text{bêta} \times \text{prime de risque du marché}$$

La valorisation d'un actif à partir du MEDAF :

Rentabilité aléatoire du titre : $\widetilde{R}=\dfrac{\widetilde{V}_1-V_0}{V_0}$

D'où : $\widetilde{V}_1=(1+\widetilde{R})V_0$ et $E[\widetilde{V}_1]=(1+E[\widetilde{R}])V_0=(1+\mu)V_0$

avec $\mu=r_f+\beta\left(\mu_M-r_f\right)=r_f+\theta\,\mathrm{Cov}\left(\widetilde{R},R_M\right)$ avec $\theta=\dfrac{\left(\mu_M-r_f\right)}{\sigma_M^2}$

Deux manières d'évaluer V_0 :

$V_0=\dfrac{E[\widetilde{V}_1]}{(1+\mu)}$ → valeur actuelle au taux ajusté pour le risque de l'espérance de $\widetilde{V}_1$

$V_0=\dfrac{E[\widetilde{V}_1]-\theta\,\mathrm{Cov}(\widetilde{V}_{1,}R_M)}{(1+r_f)}$ → valeur actuelle au taux sans risque de l'équivalent-certain au sens de $\widetilde{V}_1$

4- L'utilité du MEDAF

Malgré les difficultés à valider empiriquement le modèle, il présente au moins deux applications utiles (et utilisées).

4.1- Mesures de performance (Sharpe 1966, Treynor 1965, Jensen 1968)

Une des applications les plus précoces du MEDAF : mesurer les performances des gestionnaires de fonds (ont-ils fait mieux que le marché ?).

4.2- Actualisation

Le MEDAF indique que le taux d'actualisation approprié pour évaluer les revenus futurs d'une entreprise ou d'un investissement est déterminé par :

- le taux sans risque
- la prime de risque du marché
- le bêta de l'entreprise ou du projet d'investissement.

Le bêta peut être estimé par régression sur données historiques (sur courte période, pour raisonner à environnement donné, mais en haute fréquence pour avoir suffisamment de données), ou inféré du bêta d'entreprises comparables (pour les sociétés non cotées).

L'estimation pose problème :

- la covariance avec le marché varie dans le temps (problème d'instabilité des bêtas) ;
- les indices de marchés utilisés (CAC40...) ne reflètent pas le portefeuille de marché théorique (qui devrait englober tous les actifs, y compris non boursiers : immobilier, etc.) → critique de Roll (1977) ;
- la prime de risque est très difficile à estimer (le rendement moyen est très sensible au niveau des prix des actifs en début et fin de période d'estimation).

Le MEDAF a renouvelé la manière de concevoir la relation entre rentabilité attendue et risque, l'allocation des portefeuilles et la mesure des performances et du coût du capital.

Bibliographie :

Goffin, R. (2004), *Principes de finance moderne*, Economica

Perold, A. (2004) « The CAPM », *Journal of Economic Perspectives*, vol.18 n°3

Portrait, R. et P. Poncet (2008), *Finance de Marché*, Dalloz