5- Modèle d'évaluation des actifs financiers

Goffin, R. (2004), *Principes de finance moderne*, Economica
Perold, A. (2004) « The CAPM », *Journal of Economic Perspectives*, vol.18 n°3

Comment le risque affecte-t-il la rentabilité espérée d'un investissement ?

1- La diversification

Un portefeuille est constitué de plusieurs actifs dont les taux de rentabilité sont considérés comme des variables aléatoires R_i, dont les propriétés statistiques sont connues (observations des séries passées).

- Espérance : $E(R_i) = \mu_i$,
- Variance : $V(R_i) = \sigma_i^2$,
- Covariance : $Cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$.
- Coefficient de corrélation : $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/(\sigma_i\sigma_j)$

La constitution d'un portefeuille permet de diminuer le « risque » (mesuré par la variance de la rentabilité).

<u>Exemple :</u> portefeuille P constitué de deux titres, en proportions x et $(1 - x)$
rentabilité moyenne : $\mu_P = x\,\mu_1 + (1 - x)\,\mu_2$
« risque » du portefeuille : $\sigma_P^2 = x^2\,\sigma_1^2 + (1 - x)^2\,\sigma_2^2 + 2\,x(1 - x)\sigma_{12}$
$\sigma_P^2 = x^2\,\sigma_1^2 + (1 - x)^2\,\sigma_2^2 + 2\,x(1 - x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ alors : $\sigma_P^2 = [x^2 + (1 - x)^2 + 2\,x(1 - x)\rho_{12}]\sigma^2 = [1 - 2(1 - \rho_{12})x(1 - x)]\sigma^2$
pour $\rho_{12} = 1$, $\sigma_P^2 = \sigma^2$ quelque soit la composition du portefeuille (x).
pour $\rho_{12} < 1$, $\sigma_P^2 < \sigma^2$ quelque soit la composition du portefeuille (x).

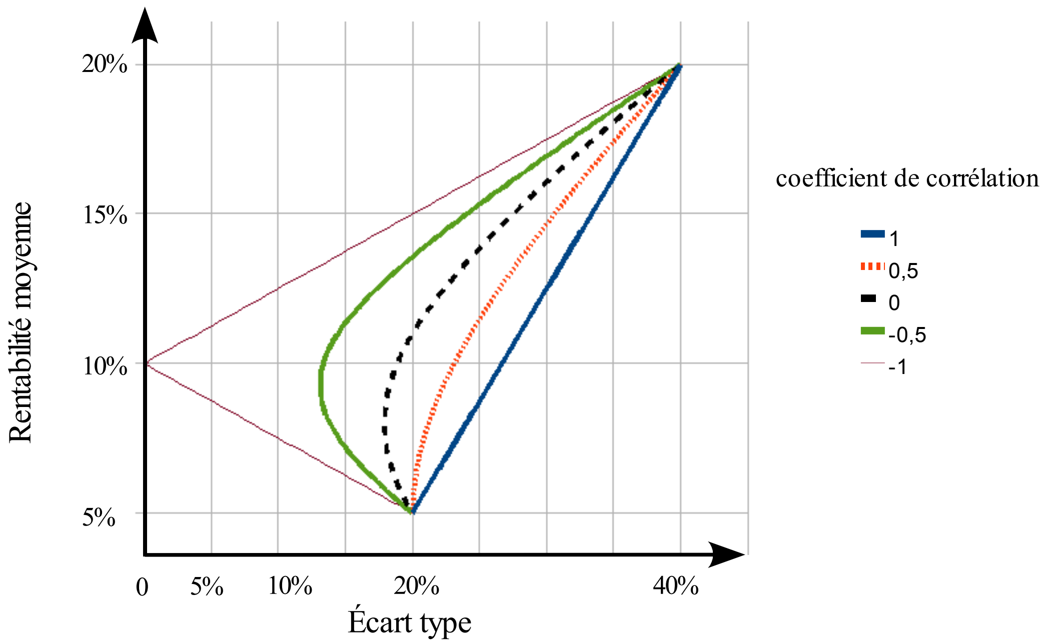
Markowitz (1952) montre que les bénéfices de la diversification dépend des corrélations.
- Corrélation = 1 → les actifs sont des substituts (leurs rentabilités varient dans le même sens, dans des proportions fixes : $R_i = b.R_j + a$ avec $b > 0$)
- Corrélation = –1 → les actifs s'assurent mutuellement (leurs rentabilités varient en sens inverse, dans des proportions fixes : $R_i = b.R_j + a$ avec $b < 0$)
- Corrélation = 0 → pas de lien entre les rentabilités.

Apports de Markowitz :
- l'intérêt de la diversification ne repose pas sur l'absence de corrélation entre les rentabilités, mais sur leur *imparfaite corrélation*.
- La réduction des risques permise par la diversification est limitée par le degré de corrélation entre les actifs (« répartir ses oeufs dans des paniers imparfaitement corrélés plutôt que les mettre dans des paniers parfaitement corrélés positivement).

<u>Exemple n°1 :</u> Rentabilité moyenne en fonction du risque (écart-type de rentabilité) d'un portefeuille à deux actifs pour diverses valeurs du coefficient de corrélation.

avec : $\mu_1 = 5\%$ $\mu_2 = 20\%$

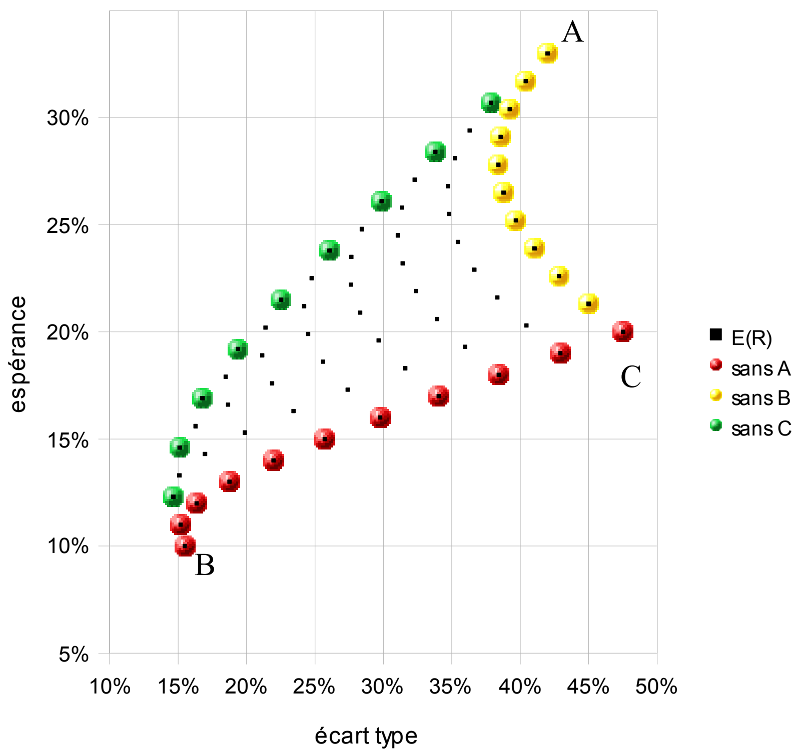
$\sigma 1 = 20\%$ $\sigma 2 = 40\%$



<u>Exemple n°2 :</u> Rentabilité moyenne en fonction du risque (écart-type de rentabilité) d'un portefeuille à trois actifs, A, B et C.

	Coefficient de corrélation ρ_{ij}		
	A	B	C
A	1	0,02	0,5
B		1	0,1
C			1

	μ_i	σ_i
A	33 %	42,0 %
B	10 %	15,5 %
C	20 %	47,5 %



La diversification du portefeuille permet de diminuer le « risque », sans nécessairement diminuer la rentabilité moyenne

2- La frontière efficiente

2.1- En l'absence d'actif sans risque (Markowitz)

Si on combine tous les titres « risqués » disponibles de toutes les manières possibles, on obtient l'ensemble des portefeuilles possibles, caractérisés par un taux de rentabilité de moyenne μ et d'écart-type σ.
Parmi tous ces portefeuilles figure le « portefeuille de marché » qui comprend tous les titres risqués pondérés par leur capitalisation. Le portefeuille de marché a une rentabilité R_M, de moyenne μ_M et d'écart-type σ_M. C'est le portefeuille d'actif risqués qui procure la diversification la plus grande possible.

Un portefeuille efficient est un portefeuille dont la rentabilité moyenne est maximale pour un niveau de risque donné, ou dont le risque est minimal pour une rentabilité donnée.

Les portefeuilles efficients sont sur la « frontière » de l'ensemble des portefeuilles dans le plan (σ, μ).

On peut montrer algébriquement que la frontière de l'ensemble des portefeuilles est une branche d'hyperbole d'équation :

$$\mu = \mu_V \pm a\sqrt{\sigma^2 - \sigma_V^2}$$

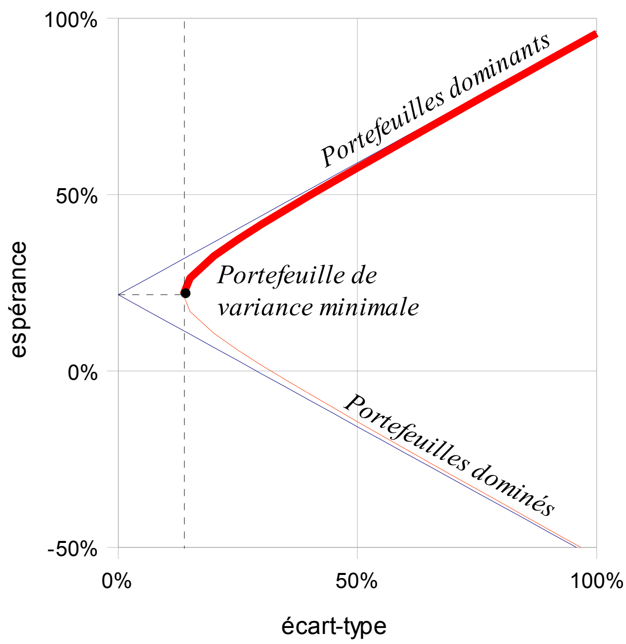
où a est une constante (qui correspond à la pente de la branche asymptotique, et dont la valeur dépend des caractéristiques des rentabilités des titres existant, leurs moyennes, variances, covariances) et σ_V et μ_V sont les caractéristiques du portefeuille de variance minimale.

<u>Exemple :</u>

$$\mu = 21{,}62\,\% \pm 0{,}7479\sqrt{\sigma^2 - 13{,}59\,\%}$$

La frontière efficiente « régulière » est la branche supérieure de l'hyperbole (portefeuilles dominants).

Les rentabilités espérées se combinent linéairement, tandis que les « risques » se combinent non linéairement, à cause des covariances.



Les portefeuilles d'actifs risqués efficients vérifient deux propriétés :

1. Toute combinaison linéaire de portefeuilles efficients est un portefeuille efficient (en particulier, le portefeuille de marché est efficient).
2. Toute la frontière « régulière » peut être générée par la combinaison linéaire de deux portefeuilles efficients quelconques, en combinant éventuellement des positions longues et courtes (« théorème de séparation à deux fonds » de F. Black 1972, qui généralise celui de Tobin 1958).

2.2- En présence d'actif sans risque (Tobin 1958)

L'actif sans risque paie un taux de rentabilité réelle fixe, sans risque de défaut (type obligation d'État indexée).

Dans un portefeuille comprenant un titre (ou un portefeuille) risqué, (σ_R, μ_R), en proportion x,et un actif sans risque, $(0, r_f)$, en proportion $(1 - x)$, rentabilité espérée et risque se combinent linéairement :

$$R_P = x\, R_R + (1 - x) r_f$$

$$\mu_P = x\, \mu_R + (1 - x) r_f \text{ et } \sigma_P = x\, \sigma_R$$

D'où : $\mu_P = r_f + \dfrac{\mu_R - r_f}{\sigma_R} \sigma_P$

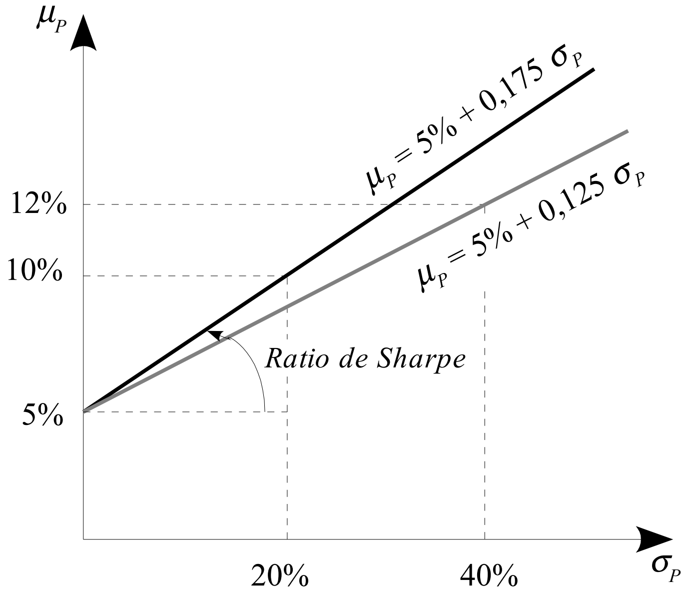
$\dfrac{\mu_R - r_f}{\sigma_R}$ s'appelle le « ratio de Sharpe » du portefeuille.

<u>Exemple :</u>
actif sans risque : $r_f = 5\%$
actifs risqués :

- R1 caractérisé par $(\sigma_1, \mu_1) = (40\%, 12\%)$
- R2 caractérisé par $(\sigma_2, \mu_2) = (20\%, 10\%)$

Tous les portefeuilles combinant l'actif sans risque et R1 sont dominés par ceux qui contiennent R2 au lieu de R1.

→ choisir le portefeuille ayant le ratio de Sharpe le plus élevé.



La possibilité de placer dans un actif sans risque élargit l'ensemble des portefeuilles possibles. La frontière efficiente « singulière » est la demi-droite qui relie le titre sans risque au portefeuille d'actifs risqués ayant le ratio de Sharpe le plus élevé (« portefeuille tangent »).

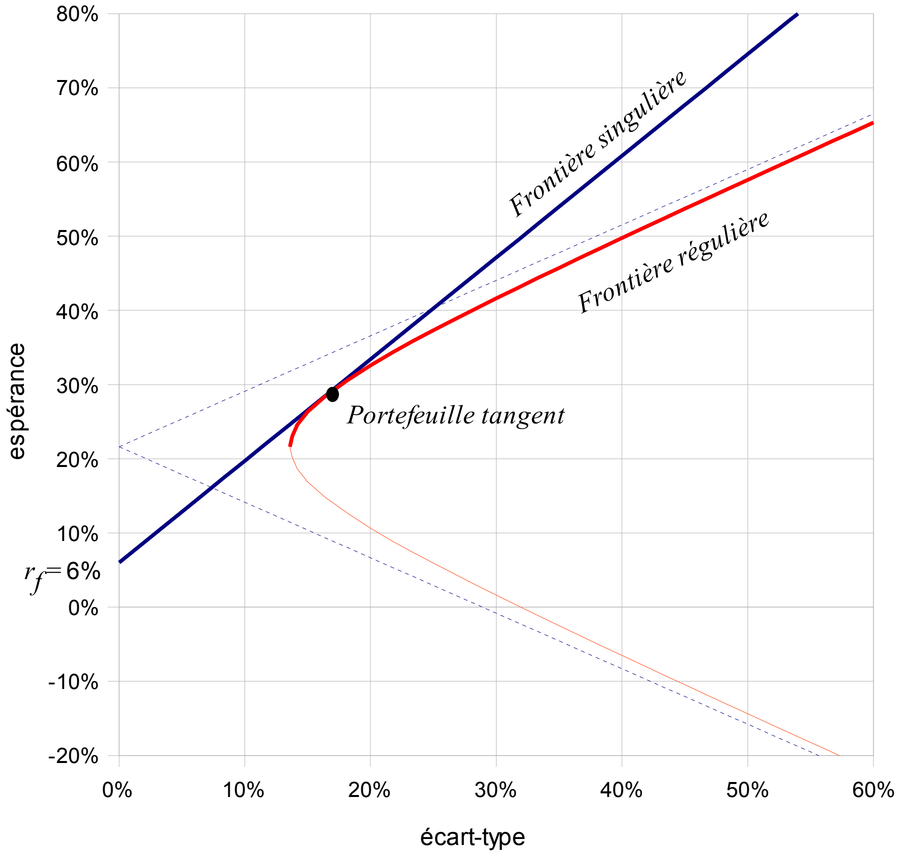
<u>Exemple :</u>

Frontière régulière : $\mu = 21{,}62\,\% \pm 0{,}7479\sqrt{\sigma^2 - 13{,}59\,\%}$

	σ	μ
centre:	0	21,62%
portef var min	13,59%	21,62%
portef tangent	16,22%	28,23%

pente asymptote : 0,7479

pente frontière singulière : 1,3708



La frontière singulière indique un principe de séparation des fonds (« théorème de séparation à deux fonds » de Tobin 1958) : des investisseurs ayant les mêmes anticipations sur les rentabilités et leurs corrélations, investissent dans le même portefeuille (ou fonds) d'actifs risqués (celui qui a le ratio de Sharpe le plus élevé). Sa composition est indépendante de la tolérance ou de l'aversion au risque des investisseurs. C'est l'allocation entre ce fonds et l'actif sans risque qui diffère selon la tolérance ou l'aversion au risque.

Détermination du portefeuille tangent :

Maximiser le ratio de Sharpe en choisissant σ, sous la contrainte d'appartenance à la frontière régulière.

$$Max_{\sigma}\frac{\mu - r_f}{\sigma} \quad \text{s.c.} \quad \mu = \mu_V \pm a\sqrt{\sigma^2 - \sigma_V^2}$$

On obtient : $\mu_T = \mu_V + \dfrac{a^2\sigma_V^2}{\mu_V - r_f}$ et $\sigma_T^2 = \sigma_V^2\left(1 + \dfrac{a^2}{(\mu_v - r_f)^2}\right)$

L'équation de la frontière singulière est alors : $\mu = r_f + \dfrac{\mu_T - r_f}{\sigma_T}\sigma$

3- L'équilibre du marché (le MEDAF)

3.1- Hypothèses (Sharpe, Treynor, Lintner, Mossin)

1. Des investisseurs riscophobes évaluent les portefeuilles en termes d'espérance et de variance des rentabilités sur une période (il existe des extensions sur plusieurs périodes, avec des fonctions d'utilité espérée)
2. Les marchés de titres sont parfaits (actifs parfaitement divisibles, pas de coûts de transactions, pas de restrictions de ventes à découvert, pas de taxes, information disponible sans coût, possibilité de prêt et d'emprunt au taux sans risque)
3. Les investisseurs ont accès aux mêmes opportunités d'investissement
4. Les anticipations de rendements (espérances, variances, covariances) sont identiques

Sous ces hypothèses, tous les investisseurs déterminent la même frontière efficiente régulière, le même portefeuille tangent (ayant le ratio de Sharpe le plus élevé).
Ils détiennent tous des actifs risqués dans les mêmes proportions (du « fonds d'actifs risqués »).

3.2- Portefeuille de marché et « droite de marché »

A l'équilibre du marché, tous les titres offerts sont détenus : le portefeuille « tangent » est le portefeuille de marché.

La frontière singulière à l'équilibre est appelée la « droite de marché » (*Capital Market Line*).

Pour tous les portefeuilles efficients, on a donc : $\boxed{\mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P}$

Tous les portefeuilles ont le même ratio de Sharpe, celui du portefeuille de marché.

La rentabilité (à l'équilibre) de tout portefeuille efficient est la somme :
- du taux sans risque
- d'une « prime de risque » qui s'écrit comme « prix du risque *fois* quantité de risque » : le ratio de Sharpe s'interprète comme « prix du risque », et l'écart-type de la rentabilité comme quantité de risque.

3.3- Évaluation des actifs et « droite caractéristique » d'un actif

Dans tout portefeuille efficient, on peut montrer que la prime de risque d'un actif particulier est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille :

$$\mu_i - r_f = \frac{Cov(R_i, R_P)}{\sigma_P^2}(\mu_P - r_f)$$

Le facteur de proportionnalité mesure la contribution marginale du titre *i* au risque du portefeuille.
On montre en effet, en calculant l'accroissement en pourcentage de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille dû à un accroissement d'un point de pourcentage de la part du titre en portefeuille, que :

$$\frac{d\,\sigma_P/\sigma_P}{d\,x_i} = \frac{Cov(R_i, R_P)}{\sigma_P^2}$$

A l'équilibre du marché, tout titre fait partie du portefeuille de marché, qui est efficient. On a donc :

$$\mu_i - r_f = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}(\mu_M - r_f)$$

Si cette relation n'est pas vérifiée pour un titre *i*, les investisseurs peuvent « battre le marché » en ajoutant le titre à leur portefeuille. Alors, la demande augmente, le cours monte et la rentabilité baisse. A l'équilibre, la rentabilité doit donc vérifier cette relation.

Autre expression, en utilisant $\rho_{iM} = \mathrm{Cov}(R_i, R_M)/(\sigma_i \sigma_M)$:

$$\frac{(\mu_i - r_f)}{\sigma_i} = \rho_{iM} \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M}$$

soit :

Ratio de Sharpe du tire	=	coefficient de corrélation des rendements du titre et du marché	x	ratio du Sharpe du portefeuille de marché

A l'équilibre, tous les titres ayant le même coefficient de corrélation avec le marché ont le même ratio de Sharpe.

<u>Interprétation :</u>

On appelle « bêta » du titre (β_i) le paramètre $\dfrac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$.

Il représente la sensibilité du rendement du titre au rendement du marché, c'est-à-dire la variation du rendement expliquée par celle du marché. On dit qu'il représente la part de « risque systématique » ou « risque non diversifiable » contenue dans le risque total du titre.

Si les rentabilités sont « normalement » distribuées et qu'on effectue la régression linéaire (par les MCO) de R_i sur R_M, on obtient la relation :

$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it}$ (« droite caractéristique du titre »).

- α_i et β_i sont les coefficients de la régression, et β_i est précisément égal à $Cov(R_i, R_M)/\sigma_M^2$
- ε_{it} est le résidu, d'espérance nulle, non corrélé à R_{mt}.

D'où l'idée de considérer la rentabilité du titre comme décomposable en deux parties :

$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$

En prenant l'espérance mathématique, on obtient : $\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M$ d'où $\alpha_i = (1 - \beta_i) r_f$.

Le rendement du titre varie pour deux raisons principales :

- l'influence du marché → β_i mesure la sensibilité du rendement du titre au rendement du marché,
  - si $\beta_i < 1$, alors le rendement du titre varie moins que celui du marché → on dit que le titre est « défensif » (actions de « père de famille »)
  - si $\beta_i > 1$, alors le rendement du titre varie plus que celui du marché → on dit que le titre est « offensif » (actions de « croissance »)
- des causes spécifiques → ε_i

Le « risque total » du titre (mesuré par la variance de la rentabilité) vaut : $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon i}^2$

soit :

Risque total = Risque systématique + Risque spécifique
(non diversifiable) (non systématique, diversifiable)

Le risque *systématique* est d'origine « macroéconomique » : croissance économique, crises, mouvements de taux d'intérêt, incertitudes géopolitiques...
Le risque *spécifique* est d'origine « microéconomique » : grèves dans l'entreprise, contrats décrochés, changements de goûts des consommateurs, poursuites judiciaires...

3.4- Élimination du risque spécifique par diversification

La rentabilité d'un portefeuille à N titres est la moyenne des rentabilités des titres :

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$$

En décomposant la rentabilité de chaque titre en $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$ on écrit la rentabilité du portefeuille comme :

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i R_M + \sum_{i=1}^{N} x_i \epsilon_i \;=\; \alpha_P + \beta_P R_M + \varepsilon_P$$

car :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i = \sum_{i=1}^{N} x_i Cov(R_i, R_M) = \sum_{i=1}^{N} Cov(x_i R_i, R_M) = Cov\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i, R_M\right) = Cov(R_P, R_M) = \beta_P$$

(le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent).

D'où la décomposition du risque total du portefeuille en risque « systématique » et en risque « spécifique » : $\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon P}^2$ (la covariance de ε_P et de R_M est nulle).

En augmentant la part des titres dont le bêta est supérieur à 1, l'investisseur augmente la composante « systématique » du risque de portefeuille (sensibilité au risque de marché).

En augmentant la part des titres dont le bêta est inférieur à 1, l'investisseur diminue la composante « systématique » du risque de portefeuille (sensibilité au risque de marché).

La composante spécifique du risque diminue en augmentant la variété des titres en portefeuille. En effet, le risque spécifique est mesuré par $\sigma_{\epsilon P}^2$ qui vaut :

$$\sigma_{\epsilon p}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_{\epsilon i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} x_i^2 Cov(\epsilon_i, \epsilon_j)$$

Dans un portefeuille équipondéré, $x_i = 1/N$ et $\sigma_{\epsilon p}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_{\epsilon i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} x_i^2 Cov(\epsilon_i, \epsilon_j)$

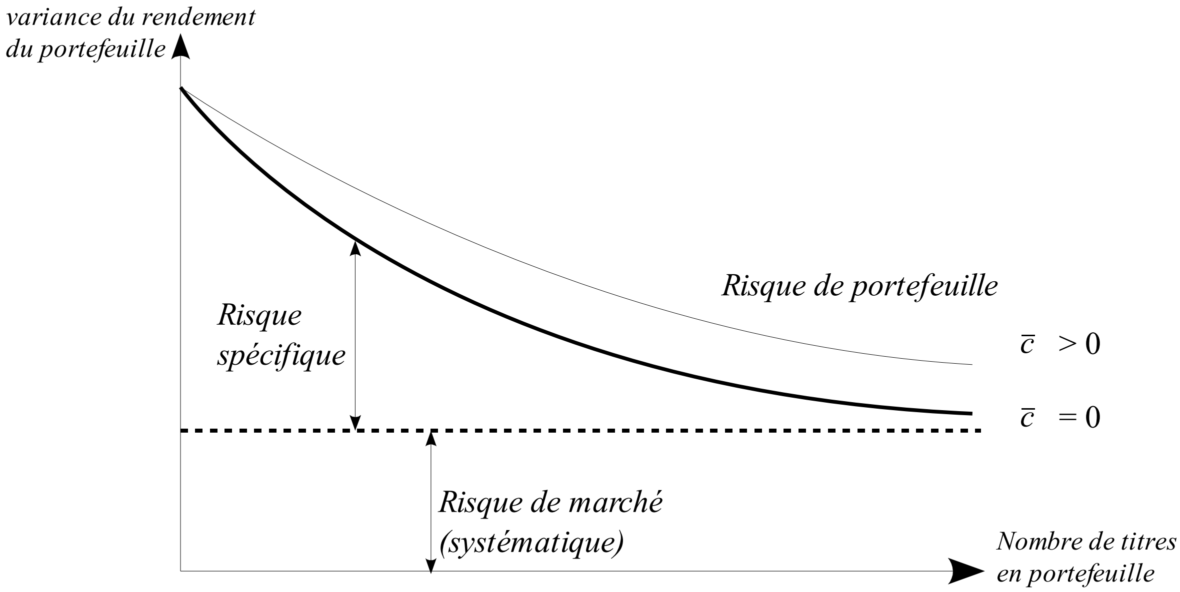
On note $\bar{v}$ la variance moyenne, et $\bar{c}$ la covariance moyenne.

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\epsilon i}^2 \quad \text{et} \quad \bar{c} = \frac{1}{N^2 - N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} Cov(\epsilon_i, \epsilon_j)$$

Alors, la variance du rendement du portefeuille s'écrit : $\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \bar{v} + \frac{N^2 - N}{N^2} \bar{c} = \frac{1}{N} \bar{v} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \bar{c}$

En augmentant le nombre de titres en portefeuille, le « risque » du portefeuille diminue. La covariance moyenne détermine le « socle » de risque spécifique qui subsiste après diversification.

Diagramme de Wagner et Lau :



3.5- Implications du MEDAF

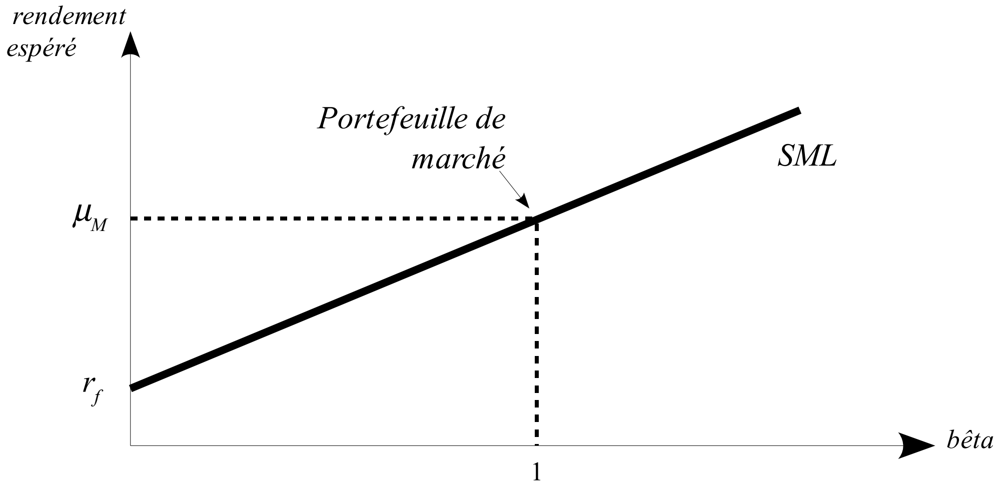
1°- La rentabilité espérée d'un titre ne dépend pas de son risque spécifique.

$$\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$$

→ La rentabilité (donc la prime de risque) d'un titre dépend de la prime de risque du marché et du bêta du titre.

2°- Le bêta indique la part du risque non diversifiable.

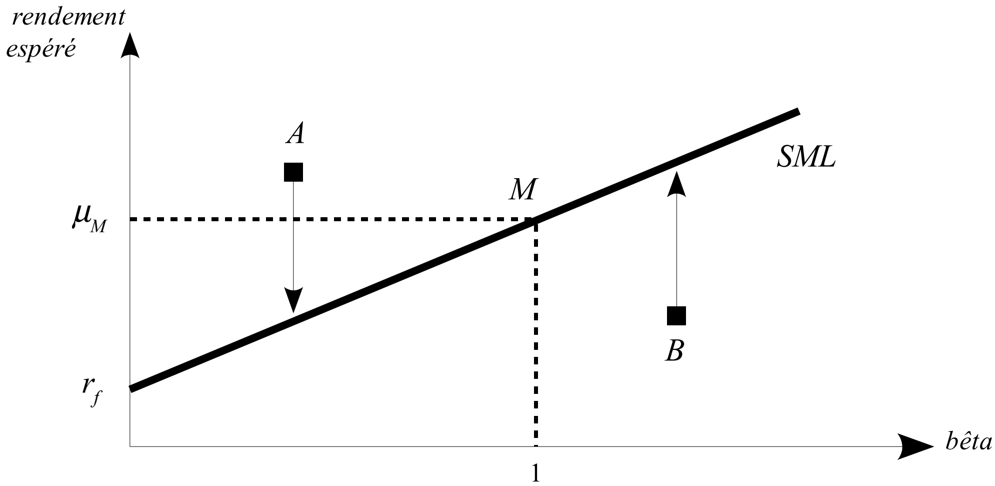
A l'équilibre, tous les portefeuilles et tous les actifs sont sur la « droite du MEDAF » (SML = *Security Market Line*)



Le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent.
Le bêta du portefeuille de marché est égal à 1.
Un portefeuille efficient est composé de titres sans risques et du portefeuille de marché (théorème de séparation en deux fonds).
→ **le bêta du portefeuille efficient mesure la fraction investie dans le portefeuille de marché** !

Seul le risque non diversifiable (la fraction du portefeuille investi dans le portefeuille de marché) « mérite » une rémunération (une rentabilité supérieure au taux sans risque).

- Un titre A situé au-dessus de la SML est « sous-évalué » : sa rentabilité espérée est supérieure à celle d'un portefeuille efficient de même bêta, la demande pour ce titre devrait augmenter, ainsi que son prix (de sorte que sa rentabilité espérée diminue).
- Un titre B situé au-dessous de la SML est, au contraire, « sur-évalué » (son prix courant est supérieur au prix d'équilibre, sa rentabilité actuelle est inférieure à sa rentabilité d'équilibre).



<u>3°- La valeur d'un titre ne dépend pas du taux de croissance anticipé des cash-flows futurs.</u>

Le modèle de Gordon-Shapiro est remise en cause et dépassé.
La valeur d'un titre dépend de sa rentabilité anticipée (l'espérance mathématique de la rentabilité), donc du bêta, du taux sans risque et de la prime de risque du marché.

4- L'utilité du MEDAF

Malgré les difficultés à valider empiriquement le modèle, il présente au moins deux applications utiles (et utilisées).

4.1- Mesures de performance (Sharpe 1966, Treynor 1965, Jensen 1968)

Une des applications les plus précoces du MEDAF : mesurer les performances des gestionnaires de fonds (ont-ils fait mieux que le marché ?).

4.2- Actualisation

Le MEDAF indique que le taux d'actualisation approprié pour évaluer les revenus futurs d'une entreprise ou d'un investissement est déterminé par :

- le taux sans risque
- la prime de risque du marché
- le bêta de l'entreprise ou du projet d'investissement.

Le bêta peut être estimé par régression sur données historiques (sur courte période, pour raisonner à environnement donné, mais en haute fréquence pour avoir suffisamment de données), ou inféré du bêta d'entreprises comparables (pour les sociétés non cotées).

L'estimation pose problème :

- la covariance avec le marché varie dans le temps ;
- les indices de marchés utilisés (CAC40...) ne reflètent pas le portefeuille de marché théorique (qui devrait englober tous les actifs, y compris non boursiers : immobilier, etc.) ;
- la prime de risque est très difficile à estimer (le rendement moyen est très sensible au niveau des prix des actifs en début et fin de période d'estimation).

Aucun de ces problèmes ne remet en cause le MEDAF en lui-même...

Le MEDAF a renouvelé la manière de concevoir la relation entre rentabilité attendue et risque, l'allocation des portefeuilles et la mesure des performances et du coût du capital.